Álgebra de límites

Cuando queremos hallar un límite, podemos usar ciertas propiedades básicas que nos faciliten el cálculo. Algunas de estas propiedades nos dicen cómo se comportan los límites con respecto a las operaciones usuales.

Por ejemplo, si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$ y $\lim_{x\to+\infty} g(x) = b$ con a y b números reales, entonces:

- $\lim_{x\to+\infty} (f(x) + g(x)) = a + b$ (el límite de una suma es la suma de los límites)
- $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - g(x)) = a - b$ (el límite de una resta es la resta de los límites)
- $\lim_{x\to+\infty} (f(x).g(x)) = a.b$ (el límite de un producto es el producto de los límites)
- Si $b \neq 0$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$ (el límite de un cociente, si el denominador no tiende a 0 es el cociente de los límites)
- Si $a > 0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)^{g(x)} = a^b$.

En el caso en que los límites den $+\infty$ o $-\infty$, también hay propiedades que nos facilitan el cálculo. Por abuso de notación, en vez de escribir toda la expresión de los límites, escribiremos por ejemplo $“+\infty” + “+\infty” = “+\infty”$ para decir que, si una función tiende a $+\infty$ y otra también tiende a $+\infty$, la suma de ambas tiende a $+\infty$. Las comillas indican que no estamos hablando de números u operaciones comunes, sino de límites.

Algunas propiedades que involucran a límites infinitos son:

$“+\infty” + “+\infty” = “+\infty”$ (si dos cosas "crecen indefinidamente", la suma "crece indefinidamente")

$“-\infty” + “-\infty” = “-\infty”$ (lo mismo pero con signo negativo)

$“+\infty” + “a” = “+\infty”$ para $a \in \mathbb{R}$ (si algo "crece indefinidamente" y otra función se acerta a a, la suma "crece indefinidamente")

$“-\infty” + “a” = “-\infty”$ para $a \in \mathbb{R}$

$“\infty”.“\infty” = “\infty”$ (para conocer el signo se utiliza la regla de signos del producto)

Si $a \neq 0$, entonces $“\infty”.“a” = “\infty”$ (para conocer el signo se utiliza la regla de signos del producto)

$\frac{“a”}{“\infty”} = “0”$ para $a \in \mathbb{R}$

$\frac{“\infty”}{“a”} = “\infty”$ para $a \in \mathbb{R}$ (para conocer el signo se utiliza la regla de signos de la división, con cuidado porque si el denominador tiende a 0, puede tender con distinto signo por derecha y por izquierda)

Si $a \neq 0$, entonces $\frac{“a”}{“0”} = “\infty”$ (para conocer el signo se utiliza la regla de signos de la división, con cuidado porque si el denominador tiende a 0, puede tender con distinto signo por derecha y por izquierda)

Si $0 < a < 1$, entonces $“a”^{“+\infty”} = “0”$

Si $0 < a < 1$, entonces $“a”^{“-\infty”} = “+\infty”$

Si $a > 1$, entonces $“a”^{“+\infty”} = “+\infty”$

Si $a > 1$, entonces $“a”^{“-\infty”} = “0”$

Indeterminaciones

Sin embargo, hay algunos límites que no puede calcularse simplemente calculando límites por separado y operando. Por ejemplo, si tenemos una función que tiende a $+\infty$ y otra que tiende a $-\infty$, no podemos predecir el límite de la suma, porque puede dar cualquier cosa dependiendo de las funciones. Con ejemplos sencillos podemos ver que

$$\lim_{x\to+\infty} x+1=+\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to+\infty} -x=-\infty$$

y sin embargo la suma tiende a 1 (pues las funciones sumadas dan 1).
Si cambiamos la primera función por $x+3$,

$$\lim_{x\to+\infty} x+3=+\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to+\infty} -x=-\infty$$

y sin embargo la suma tiende a 3 (pues las funciones sumadas dan 3).

Hemos dado dos ejemplos donde $``+\infty" + ``-\infty"$ da dos límites distintos.

Estos casos, que no pueden predecirse, se llaman *indeterminaciones* y deben calcularse con otras técnicas. Si queremos calcular el límite, no basta con decir que es una indeterminación, hay que calcular el límite con otros métodos, algunos de los cuáles se van a ir estudiando.

Por ejemplo, si queremos calcular $\lim_{x\to-\infty}(x^3+2x^2)$, tenemos una indeterminación del tipo $``-\infty" + ``+\infty"$, pues cuando x tiende a $-\infty$, x^3 tiende a $-\infty$ ($``\infty"."\infty"."\infty" = ``\infty"$ y la regla de signos nos da negativo) y $2x^2$ tiende a $+\infty$ (pues $``2"."\infty"."\infty" = ``\infty"$ y la regla de signos nos da positivo). Una forma de calcular este límite es sacar factor la potencia más alta de x posible:

$$\lim_{x\to-\infty}(x^3+2x^2) = \lim_{x\to-\infty} x^2(x+2)$$

y nos queda un límite del tipo $``+\infty"."-\infty"$ que no es una indeterminación y se resuelve usando el álgebra de límites. Por lo tanto

$$\lim_{x\to-\infty}(x^3+2x^2) = -\infty.$$

Algunas indeterminaciones usuales son:

$$``+\infty" + ``-\infty"$$

$$``0"."\infty"$$

$$\frac{``0"}{``0"}$$

$$\frac{``\infty"}{``\infty"}$$

Todo lo expuesto anteriormente, tanto el álgebra de límites como las indeterminaciones, vale para el cálculo de cualquier límite (y no solo para límites cuando x tiende a infinito).