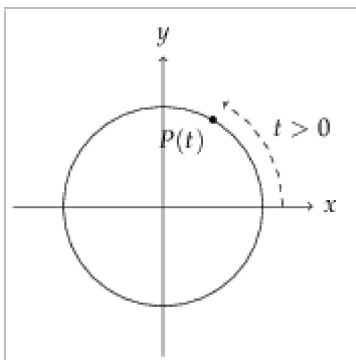


# Funciones trigonométricas

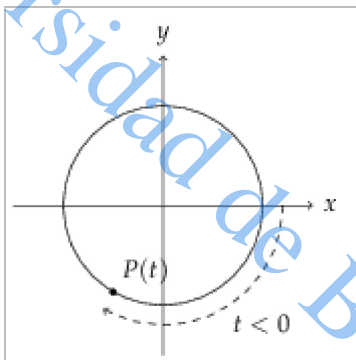
## Funciones seno y coseno

Consideremos la circunferencia de centro  $(0, 0)$  y radio  $1$ . Llamemos  $P(t)$  al punto de la circunferencia al cual se llega recorriendo sobre la circunferencia una longitud de arco igual a  $|t|$ , partiendo del punto  $(0, 1)$ ,

- en sentido antihorario si  $t \geq 0$

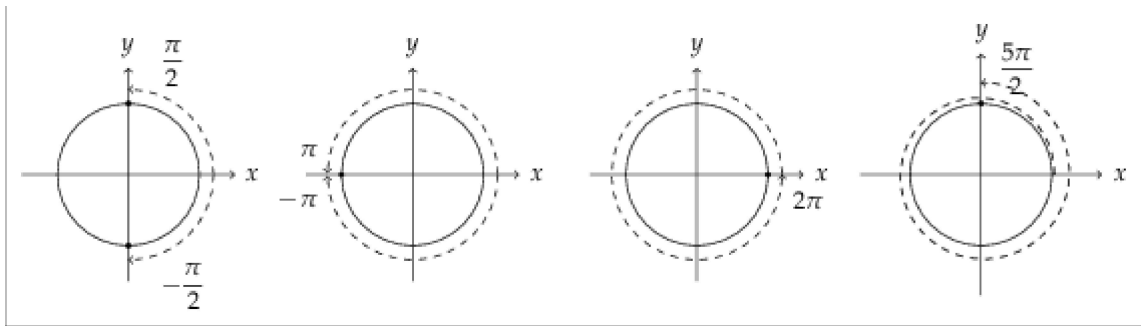


- en sentido horario si  $t < 0$



Ubiquemos  $P(t)$  para algunos valores de  $t$ . Recordemos, al efecto, que como el radio es  $1$ , la longitud de la circunferencia es  $2\pi$ .

- Para  $t = 0$ , nos quedamos en el punto  $(1, 0)$ . Por lo tanto,  $P(0) = (1, 0)$ .
- Si  $t = \frac{\pi}{2}$ , recorremos un cuarto de circunferencia en sentido antihorario. Y por lo tanto  $P\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0, 1)$ .
- Si  $t = -\frac{\pi}{2}$ , recorremos también un cuarto de circunferencia, pero en sentido horario. Entonces tenemos  $P\left(-\frac{\pi}{2}\right) = (0, -1)$ .
- Si  $t = \pi$ , tenemos que recorrer media circunferencia, en sentido antihorario. Así es que llegamos al  $(-1, 0)$ . Cuando  $t = -\pi$ , también hay que recorrer media circunferencia, pero en el otro sentido. Nuevamente quedamos ubicados en el  $(-1, 0)$ . Por esto,  $P(\pi) = P(-\pi) = (-1, 0)$ .
- Si  $t = 2\pi$ , debemos dar una vuelta entera, y volvemos al punto de partida;  $P(2\pi) = P(0) = (1, 0)$ .
- Si  $t = \frac{5\pi}{2}$ , habremos dado cinco cuartos de vuelta; es decir, una vuelta entera y un cuarto más. Resulta  $P\left(\frac{5\pi}{2}\right) = (0, 1)$ .



En general,

$$P(t) = P(t + 2k\pi) \text{ para todo } k \in \mathbb{Z},$$

donde  $2k\pi$  representa un múltiplo entero de  $2\pi$  (es decir, un número entero de vueltas).

Estamos ya en condiciones de presentar las funciones seno y coseno.

Dado  $t \in \mathbb{R}$ , si  $P(t) = (x, y)$ , es:

$$\cos(t) = x, \quad \text{sen}(t) = y.$$

Es decir, para cada  $t$ , coseno de  $t$  y seno de  $t$  son, respectivamente, abscisa y ordenada del punto  $P(t)$ :

$$P(t) = (\cos(t), \text{sen}(t)).$$

Retomando los valores de  $t$  para los que anteriormente ubicamos  $P(t)$ , calculamos su seno y su coseno:

$t$	$P(t)$	$\cos(t)$	$\text{sen}(t)$
0	(1, 0)	1	0
$\frac{\pi}{2}$	(0, 1)	0	1
$-\frac{\pi}{2}$	(0, -1)	0	-1
$\pi$	(-1, 0)	-1	0
$-\pi$	(-1, 0)	-1	0
$2\pi$	(1, 0)	1	0
$\frac{5\pi}{2}$	(0, 1)	0	1

Por lo que observamos antes, vale

$$\cos(t) = \cos(t + 2k\pi) \text{ y } \text{sen}(t) = \text{sen}(t + 2k\pi) \text{ para } k \in \mathbb{Z}.$$

Por ello se dice que son funciones periódicas, de período  $2\pi$ .

Observemos también el signo del seno y del coseno según el cuadrante en el que se encuentre  $P(t)$ :