Función inversa

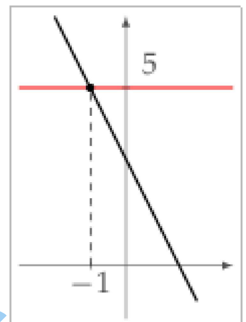
Dada una función real f queremos resolver la ecuación $f(x) = b$ para los distintos valores de $b \in \mathbb{R}$.

Ejemplo: Consideremos la función $f(x) = -2x + 3$. Comencemos resolviendo $f(x) = b$ para $b = 5$. Tenemos que

$f(x) = 5 \iff -2x + 3 = 5 \iff -2x = 5 - 3 \iff -2x = 2 \iff x = -1,$

es decir, la ecuación tiene una única solución $x = -1$. (Observamos que, en efecto $f(-1) = 5$.)

Gráficamente, lo que estamos haciendo es buscar un valor x tal que el punto $(x, f(x))$ del gráfico de f tenga segunda coordenada igual a 5, es decir, que esté simultáneamente en el gráfico de f y en la recta $y = 5$:



De la misma manera que para $b = 5$, si consideramos cualquier $b \in \mathbb{R}$, la recta $y = b$ interseca al gráfico de f en un único punto, es decir, para cualquier $b \in \mathbb{R}$ hay un único $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) = b$.

Si para cada $b \in \mathrm{Im}(f)$, existe un único $a \in \mathrm{Dom}(f)$ tal que $f(a) = b$, se puede definir una nueva función que a cada b le asigna este valor a. Esta función se llama *la función inversa* de f,

$$f^{-1} : \mathrm{Im}(f) \to \mathrm{Dom}(f),$$

y verifica que

$$f^{-1}(b) = a \iff f(a) = b.$$

En el ejemplo anterior, como vimos gráficamente, es posible definir f^{-1}. Busquemos una fórmula para esta función. Para esto, debemos encontrar, para cada $b \in \mathrm{Im}(f)$, el único $a \in \mathrm{Dom}(f)$ tal que $f(a) = b$.

Recordemos que $f(x) = -2x + 3$. En este caso, $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$. Resolvemos la ecuación $f(x) = y$ para cada $y \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = y \iff -2x + 3 = y \iff -2x = y - 3 \iff x = -\frac{1}{2}(y - 3) \iff x = -\frac{1}{2}y + \frac{3}{2}$$

Entonces, la función $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la que a cada y le asigna el valor $-\frac{1}{2}y + \frac{3}{2}$. Renombrando la variable, dado que usualmente se utiliza la letra x para la variable de una función, obtenemos

$$\boxed{f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}}$$

Observación. La notación $f^{-1}(x)$ se usa para representar el valor que se obtiene al aplicarle la función f^{-1} (inversa de f) a x. En general, este valor no coincide con $(f(x))^{-1} = \frac{1}{f(x)}$, que es el inverso del valor que se obtiene al aplicarle la función f a x.

Por ejemplo, para la función $f(x) = -2x + 3$ del ejemplo, se tiene que

$$f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \qquad \text{y} \qquad (f(x))^{-1} = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{-2x+3}$$

La propiedad fundamental que verifica la función inversa f^{-1} de una función f tiene que ver con la composición de ambas funciones. Dado $b \in \mathrm{Dom}(f^{-1})$, vimos que el valor $a = f^{-1}(b)$ es el único $a \in \mathrm{Dom}(f)$ tal que $f(a) = b$; o sea

$$f(\underbrace{f^{-1}(b)}_{a}) = b \quad \text{o, equivalentemente,} \quad f \circ f^{-1}(b) = b.$$

Similarmente, dado $a \in \mathrm{Dom}(f)$, si $b = f(a)$, entonces a es la única solución de la ecuación $f(x) = b$, es decir, $f^{-1}(b) = a$. Así,

$$f^{-1}(\underbrace{f(a)}_{b}) = a \quad \text{o, equivalentemente,} \quad f^{-1} \circ f(a) = a$$

Resumiendo,

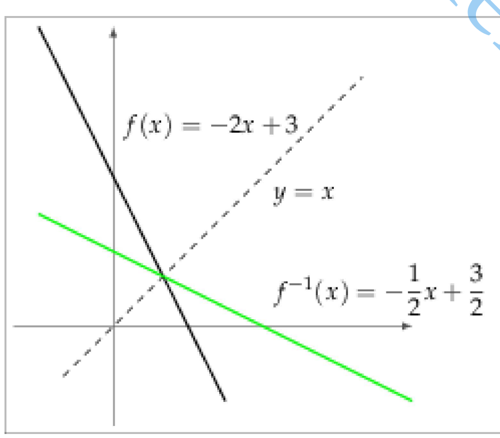
$$\boxed{f \circ f^{-1}(x) = x \quad \forall\, x \in \mathrm{Dom}(f^{-1}) \qquad \text{y} \qquad f^{-1} \circ f(x) = x \quad \forall\, x \in \mathrm{Dom}(f)}$$

Verifiquemos estas igualdades para la función $f(x) = -2x + 3$ del ejemplo. Como vimos, en este caso, $f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$. Tenemos entonces que:

- $f \circ f^{-1}(x) = f(f^{-1}(x)) = f(-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}) = -2(-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}) + 3 = (-2)(-\frac{1}{2})x - 2.\frac{3}{2} + 3 = x - 3 + 3 = x$
- $f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(-2x+3) = -\frac{1}{2}(-2x+3) + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}.(-2)x - \frac{1}{2}3 + \frac{3}{2} = x - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = x$

Propiedad importante: $\mathrm{Dom}(f^{-1}) = \mathrm{Im}(f) \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}(f^{-1}) = \mathrm{Dom}(f)$.

Grafiquemos ahora la función del ejemplo junto con su inversa:



Observemos que, en ambos casos, los gráficos de f y f^{-1} resultan simétricos con respecto a la recta $y = x$. Esto ocurre en general. Como vemos en el gráfico siguiente, dado un punto (a, b), su simétrico respecto de la recta $y = x$ es el punto (b, a)