

# Composición de funciones

Si  $f$  y  $g$  son dos funciones reales, la *composición*  $g \circ f$  (" $g$  compuesta con  $f$ ") es una nueva función que a cada  $x$  le asigna el resultado de aplicarle la función  $g$  a  $f(x)$ , es decir,

$$g \circ f(x) = g(f(x))$$

**Ejemplo.** Sean  $f(x) = x^2 + 3$  y  $g(x) = 2x - 1$ . Hallar  $g \circ f$ .

Por la definición de  $g \circ f$ , sabemos que, para cada  $x$  vale  $g \circ f(x) = g(f(x))$ . Reemplazando  $f(x) = x^2 + 3$  en esta expresión obtenemos que

$$g \circ f(x) = g(x^2 + 3)$$

Finalmente, calculamos el valor  $g(x^2 + 3)$  reemplazando en la fórmula de  $g$  y operando:

$$g(x^2 + 3) = 2(x^2 + 3) - 1 = 2x^2 + 6 - 1 = 2x^2 + 5$$

En consecuencia, obtenemos que

$$\boxed{g \circ f(x) = 2x^2 + 5}$$

En forma análoga a la definición de  $g \circ f$ , se puede definir también la composición  $f \circ g$  (" $f$  compuesta con  $g$ ") como la función que a cada  $x$  le asigna el resultado de aplicarle la función  $f$  a  $g(x)$ , es decir,

$$f \circ g(x) = f(g(x))$$

**Ejemplo.** Sean  $f(x) = x^2 + 3$  y  $g(x) = 2x - 1$ . Hallar  $f \circ g$ .

Por la definición de  $f \circ g$ , sabemos que  $f \circ g(x) = f(g(x))$ .  
Reemplazando  $g(x) = 2x - 1$ , obtenemos

$$f \circ g(x) = f(2x - 1)$$

Para terminar, calculamos  $f(2x - 1)$  usando la fórmula que define  $f$  y realizamos las operaciones que aparecen:

$$f(2x - 1) = (2x - 1)^2 + 3 = 4x^2 - 4x + 4$$

obteniendo así que

$$\boxed{f \circ g(x) = 4x^2 - 4x + 4}$$

Observamos que, en los ejemplos anteriores, al componer las funciones  $f(x) = x^2 + 3$  y  $g(x) = 2x - 1$  en los dos órdenes posibles, obtuvimos dos funciones distintas:

$$g \circ f(x) = 2x^2 + 5 \quad \text{y} \quad f \circ g(x) = 4x^2 - 4x + 4$$

De hecho, en general, se tiene que

$$\boxed{f \circ g \neq g \circ f}$$

Dado  $x \in \mathbb{R}$ , para que sea posible calcular  $g \circ f(x) = g(f(x))$ , es necesario que  $f$  esté definida en  $x$  (es decir, que  $x \in \text{Dom}(f)$ ) y que  $g$  esté definida en  $f(x)$  (es decir, que  $f(x) \in \text{Dom}(g)$ ). Estas dos condiciones determinan naturalmente el dominio de  $g \circ f$ .

**Ejemplo.** Sean  $f(x) = -x + 3$  y  $g(x) = \frac{-2x + 1}{x - 2}$ . Hallar  $f \circ g$  y  $g \circ f$ .

Calculamos las funciones pedidas a partir de las definiciones y efectuando las operaciones que aparecen. Obtenemos:

$$\begin{aligned} f \circ g(x) &= f(g(x)) = f\left(\frac{-2x + 1}{x - 2}\right) = -\left(\frac{-2x + 1}{x - 2}\right) + 3 = \\ &= \frac{2x - 1}{x - 2} + 3 = \frac{2x - 1 + 3(x - 2)}{x - 2} = \frac{2x - 1 + 3x - 6}{x - 2} = \frac{5x - 7}{x - 2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= g(f(x)) = g(-x + 3) = \frac{-2(-x + 3) + 1}{(-x + 3) - 2} = \\ &= \frac{2x - 6 + 1}{-x + 3 - 2} = \frac{2x - 5}{-x + 1} \end{aligned}$$

Resumiendo, las composiciones son:

$$f \circ g(x) = \frac{5x - 7}{x - 2} \quad \text{y} \quad g \circ f(x) = \frac{2x - 5}{-x + 1}$$

Observemos en este ejemplo que, para que sea posible calcular  $f \circ g$  es necesario que  $g$  esté definida, es decir, que  $x \neq 2$ . Una vez calculado  $g(x)$ , siempre se le podrá aplicar  $f$  para obtener  $f \circ g(x)$ , puesto que  $f$  está definida en todo  $\mathbb{R}$ . Análogamente, para poder calcular  $g \circ f(x)$ , como  $f(x)$  se puede calcular para todo  $x$ , sólo debemos verificar que sea posible aplicarle  $g$  al resultado, es decir, que  $g$  esté definida en  $f(x) = -x + 3$ . Como el único número real que no pertenece al dominio de  $g$  es 2, esto será posible siempre que  $-x + 3 \neq 2$ , es decir, para  $x \neq 1$ . En consecuencia:

$$\text{Dom}(f \circ g) = \mathbb{R} - \{2\} \quad \text{y} \quad \text{Dom}(g \circ f) = \mathbb{R} - \{1\}$$