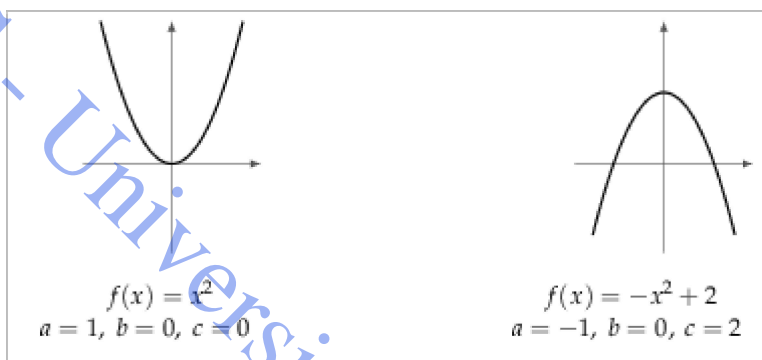


Funciones cuadráticas

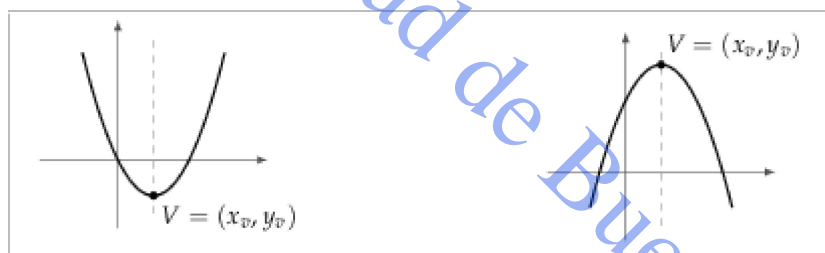
Llamamos *funciones cuadráticas* a las de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$, y $a \neq 0$. Sus gráficos son *parábolas*. Dependiendo del signo de a , tendremos parábolas de la forma



Por ejemplo,



Las parábolas tienen un vértice y un eje de simetría.



Las coordenadas del vértice $V = (x_v, y_v)$ de la parábola se pueden calcular como $x_v = -\frac{b}{2a}$, $y_v = f(x_v)$ y el eje de simetría de la parábola correspondiente al gráfico de f es la recta vertical dada por la ecuación $x = x_v$.

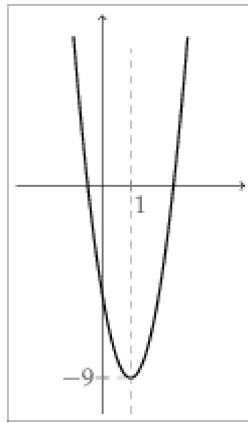
Por ejemplo, consideremos la función cuadrática

$$f(x) = 4x^2 - 8x - 5.$$

En este caso, $a = 4$, $b = -8$ y $c = -5$. Las coordenadas del vértice de su gráfico se calculan como

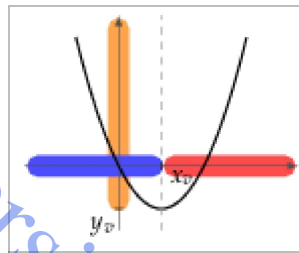
$$x_v = -\frac{-8}{2 \cdot 4} = 1, \quad y_v = f(x_v) = f(1) = 4 \cdot 1^2 - 8 \cdot 1 - 5 = -9.$$

Por lo tanto el vértice es $V = (1, -9)$ y el eje de simetría del gráfico es $x = 1$.

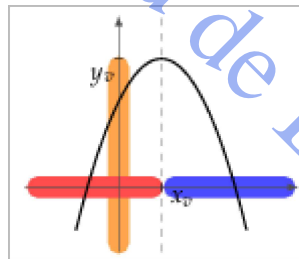


Las coordenadas (x_v, y_v) del vértice y el signo de a también nos permiten determinar otras características de f :

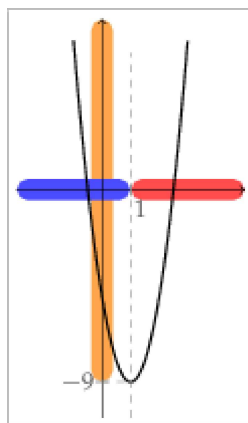
- Si $a > 0$, la función es decreciente en $(-\infty; x_v)$, es creciente en $(x_v; +\infty)$, alcanza un mínimo en $x = x_v$ y su imagen es $\text{Im}f = [y_v; +\infty)$.



- Si $a < 0$, la función es creciente en $(-\infty; x_v)$, es decreciente en $(x_v; +\infty)$, alcanza un máximo en $x = x_v$ y su imagen es $\text{Im}f = (-\infty; y_v]$.



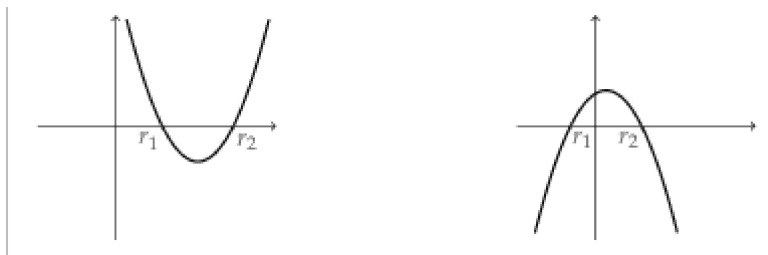
En el ejemplo anterior, como $f(x) = 4x^2 - 8x - 5$, el vértice es $V = (1, -9)$ y $a = 4 > 0$, deducimos que la función es decreciente en $(-\infty; 1)$, es creciente en $(1; +\infty)$, alcanza un mínimo en $x = 1$ y su imagen es $\text{Im}f = [-9; +\infty)$.



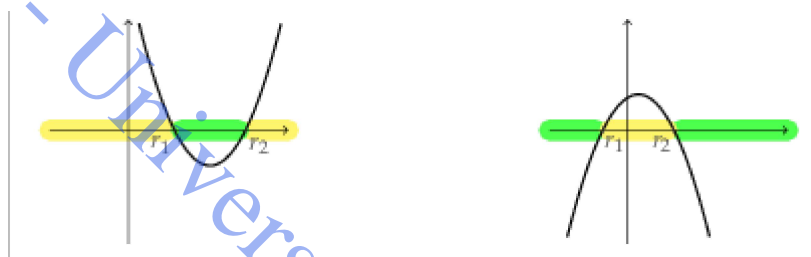
Los ceros (o raíces) de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ se pueden obtener mediante la fórmula

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Si $b^2 - 4ac > 0$, la función tiene dos raíces reales distintas. Si las llamamos r_1 y r_2 , su gráfico podría ser



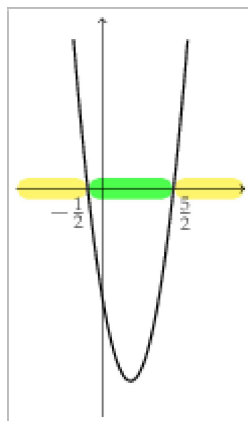
Si $a > 0$, el conjunto de positividad de f es $C^+ = (-\infty; r_1) \cup (r_2; +\infty)$ y el conjunto de negatividad de f es $C^- = (r_1; r_2)$. Y, al revés, si $a < 0$ el conjunto de positividad de f es $C^+ = (r_1; r_2)$ y el de negatividad es $C^- = (-\infty; r_1) \cup (r_2; +\infty)$.



De nuevo en el ejemplo $f(x) = 4x^2 - 8x - 5$, las raíces de f se obtienen calculando

$$\frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-5)}}{2 \cdot 4} = \frac{8 \pm 12}{8}$$

Es decir, $r_1 = -\frac{1}{2}$ y $r_2 = \frac{5}{2}$. Como $a = 4 > 0$, tenemos $C^+ = (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (\frac{5}{2}; +\infty)$ y $C^- = (-\frac{1}{2}; \frac{5}{2})$.



- Si $b^2 - 4ac = 0$, entonces la función tiene un único cero r , y su gráfico sería de alguna de estas formas: