

# Dominio e imagen de una función

Una **función**  $f : A \rightarrow B$  (se lee " $f$  de  $A$  en  $B$ "), donde  $A$  y  $B$  son subconjuntos de los números reales, es una regla que asigna a cada elemento del conjunto  $A$ , un único elemento del conjunto  $B$ .

- $A$  es el **dominio** de  $f$  (se nota  $\text{Dom} f$ ) o conjunto de partida y  $B$  es el conjunto de llegada.
- El valor que  $f$  asigna al elemento  $a \in A$  se escribe  $f(a)$  (y se lee " $f$  de  $a$ ").
- La **imagen** de  $f$  (que se nota  $\text{Im} f$ ) es el conjunto formado por los  $b \in B$  para los cuales existe  $a \in A$  tal que  $f(a) = b$ .
- El gráfico de  $f$  es el subconjunto del plano real formado por los puntos de la forma  $(a, f(a))$ , con  $a \in A$ .

Es habitual que las funciones aparezcan definidas por expresiones tales como

$$f(x) = x^2 - 3x, \quad g(x) = 4x - 1, \quad h(x) = \frac{x}{x-2} \quad \text{ó} \quad k(x) = \sqrt{x+6} \quad (*)$$

Para obtener, por ejemplo, el número que  $f$  asigna a  $1$ , reemplazamos  $x$  por  $1$  en la primera expresión. Así:

$$f(1) = 1^2 - 3 \cdot 1 = 1 - 3 = -2;$$

es decir,  $f(1) = -2$ . Se lee " $f$  de  $1$  es  $-2$ ".

Análogamente, tenemos:

- $g\left(\frac{2}{3}\right) = 4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) - 1 = \frac{8}{3} - 1 = \frac{5}{3}$ ,
- $h(4) = \frac{4}{4-2} = 2$ ,
- $k(-5) = \sqrt{-5+6} = \sqrt{1} = 1$ .

En (\*) no se explicita el dominio ni el conjunto de llegada de cada función. Sin temor a equivocarnos podemos pensar que en cualquier caso el conjunto de llegada es  $\mathbb{R}$ .

Llamaremos **dominio natural** de  $f$  -o simplemente **dominio** de  $f$ - al conjunto de todos los números reales  $x$  para los cuales  $f(x)$  es un número.

**Ejemplo 1.** Sea  $f$  la función dada por  $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 7$ .

- Hallar  $\text{Dom} f$ .
- Determinar el punto del gráfico de  $f$  que tiene abscisa  $-2$ .
- Decidir si  $2 \in \text{Im} f$ .
- Decidir si  $-9 \in \text{Im} f$ .

**Solución.**

a) Observemos que cualquiera sea el número real  $x$ , podemos elevarlo al cuadrado, multiplicar el número obtenido por  $\frac{1}{4}$  y al resultado restarle  $7$ . Es decir, cualquiera sea  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x)$  es un número. Concluimos que

$$\text{Dom} f = \mathbb{R}.$$

b) El punto  $P$  del gráfico de  $f$  que tiene abscisa  $-2$  es  $P = (-2, f(-2))$ . Calculamos:

$$f(-2) = \frac{1}{4}(-2)^2 - 7 = \frac{1}{4} \cdot 4 - 7 = 1 - 7 = -6.$$

Luego

$$P = (-2, -6).$$

c)  $2 \in \text{Im}f \iff$  (este símbolo significa "si y sólo si") existe  $x \in \text{Dom}f$  tal que  $f(x) = 2 \iff f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 7 = 2$ .  
Veamos si existe un tal  $x$ :

$$\frac{1}{4}x^2 - 7 = 2 \iff \frac{1}{4}x^2 = 2 + 7 = 9 \iff x^2 = 9 \cdot 4 = 36 \iff x = -6 \text{ ó } x = 6.$$

(En este caso, hay dos posibles  $x$ !). Concluimos entonces que

$$2 \in \text{Im}f.$$

d) Razonando como en c), ahora analizamos si existe  $x \in \text{Dom}f$  tal que  $\frac{1}{4}x^2 - 7 = -9$ .

Trabajando esta ecuación como antes, llegamos a que un tal  $x$  debería satisfacer  $x^2 = (-2) \cdot 4 = -8$ . Pero como  $-8 < 0$  y  $x^2 \geq 0$  para todos los  $x \in \mathbb{R}$ , no existe  $x$  como el que buscamos. Hemos demostrado que

$$-9 \notin \text{Im}f.$$

**Ejemplo 2.** Sea  $f$  la función dada por  $f(x) = \frac{8x + 20}{x + 4}$ .

- Hallar  $\text{Dom}f$ .
- Determinar el punto  $P$  del gráfico de  $f$  que pertenece al eje  $y$ .
- Hallar, si existe, un punto  $Q$  del gráfico de  $f$  cuya ordenada sea igual a 4.

**Solución.**

a) Observemos que cualquiera sea el número real  $x$ , no hay problema para calcular  $8x + 20$  ni para calcular  $x + 4$ . El punto es que para realizar el cociente, necesitamos que el denominador  $(x + 4)$  sea distinto de 0. Ahora bien,  $x + 4 = 0 \iff x = -4$ . Entonces,

$$\text{Dom}f = \{x \in \mathbb{R} / x + 4 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} / x \neq -4\} = \mathbb{R} - \{-4\}.$$

Respondemos

$$\text{Dom}f = \mathbb{R} - \{-4\}.$$

b) El eje  $y$  está formado por los puntos del plano que tienen abscisa igual a 0. Por lo tanto el punto  $P$  tendrá la forma  $P = (0, b)$ . Como además pertenece al gráfico de  $f$ , será  $b = f(0)$ , es decir,  $P = (0, f(0))$ .

Es  $f(0) = \frac{8 \cdot 0 + 20}{0 + 4} = \frac{0 + 20}{4} = 5$ . Reemplazando nos queda

$$P = (0, 5).$$

c) Debe ser  $Q = (a, f(a))$ . Si la ordenada vale 4, existirá  $Q$  si y sólo si existe  $a$  tal que  $f(a) = 4$  ( $\iff 4 \in \text{Im}f$ ). Veamos:

$$f(a) = 4 \iff \frac{8a + 20}{a + 4} = 4 \iff 8a + 20 = 4(a + 4) \iff 8a + 20 = 4a + 16 \iff 8a - 4a = 16 - 20 \iff 4a = -4 \iff a = \frac{-4}{4} = -1.$$

Chequeemos:  $f(-1) = \frac{8(-1) + 20}{-1 + 4} = \frac{-8 + 20}{3} = \frac{12}{3} = 4$ .

Tenemos entonces

$$Q = (-1, 4).$$

**Ejemplo 3.** Sea  $f$  la función dada por  $f(x) = \sqrt{x - 3} - 4$ .

- a) Hallar  $\text{Dom } f$ .  
b) Decidir si  $0 \in \text{Im } f$ .

**Solución.**

a) Cualquiera sea  $x$ , podemos restarle 3. Pero si a continuación queremos calcular la raíz cuadrada de lo obtenido, necesitamos que esa cantidad sea mayor o igual que 0. Restarle 4 al resultado puede hacerse siempre. Así,  $\text{Dom } f = \{x \in \mathbb{R} / x - 3 \geq 0\}$ . Para escribirlo como intervalo, resolvemos la desigualdad:

$$x - 3 \geq 0 \iff x \geq 3 \iff x \in [3, +\infty).$$

Escribimos

$$\boxed{\text{Dom } f = [3, +\infty)}.$$

b)  $0 \in \text{Im } f \iff$  existe  $x \in \text{Dom } f$  tal que  $f(x) = 0$ . Veamos:

$$f(x) = 0 \iff \sqrt{x-3} - 4 = 0 \iff \sqrt{x-3} = 4 \iff (\sqrt{x-3})^2 = 4^2 \iff x-3 = 16 \iff x = 19.$$

La conclusión es que

$$\boxed{0 \in \text{Im } f}.$$

CPBA - Universidad de Buenos Aires