EJEMPLOS RESUELTOS

OPERACIONES ALGEBRAICAS

1. Calcular.

- $3-(5-7)+(7-(-2)) = 3-(-2)+(7+2) = 3+2+9 = 14$;

  otra forma: $3-(5-7)+(7-(-2)) = 3-5+7+7-(-2)) = 3-5+7+7+2 = 14$

- $\frac{5}{6}+\frac{1}{4}-2=\frac{10}{12}+\frac{3}{12}-\frac{24}{12}=\frac{10+3-24}{12}=-\frac{11}{12}$;

  otra forma: $\frac{5}{6}+\frac{1}{4}-2=\frac{\frac{12}{6}\cdot 5+\frac{12}{4}\cdot 1-\frac{12}{1}\cdot 2}{12}=-\frac{11}{12}$

2. Calcular

- $(6+5)(-2) = 11(-2) = -22$;

  otra forma: $(6+5)(-2) = 6(-2)+5(-2) = -12-10 = -22$

- $6+5(-2) = 6-10 = -4$

- $(-7)(-2)+3(-5) = 14-15 = -1$

- $(-7)(-2)+3-5 = 14+3-5 = 12$

- $\frac{4}{9}\cdot\left(-\frac{5}{6}\right)=\frac{4\cdot(-5)}{9\cdot 6}=\frac{-20}{54}=-\frac{10}{27}$

3. Calcular.

- $(-3)^2\cdot 5\cdot\frac{2}{3}+(-1)^3(2^2)^3 = 9\cdot 5\cdot\frac{2}{3}+(-1)2^6 = \frac{90}{3}-2^6 = 30-64 = -34$

- $\left(-\frac{3}{5}\right)^{-2}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}-\frac{3}{8}}=\left(-\frac{5}{3}\right)^{2}+\sqrt[3]{\frac{1}{8}}=\frac{25}{9}+\frac{1}{2}=\frac{59}{18}$

4. Reducir a una sola fracción.

- $\dfrac{\frac{5}{6}}{\frac{15}{8}} = \dfrac{5}{6} \cdot \dfrac{8}{15} = \dfrac{5 \cdot 8}{6 \cdot 15} = \dfrac{40}{90} = \dfrac{4}{9}$

- $\dfrac{6}{\frac{5}{4}} = \dfrac{6}{1} \cdot \dfrac{4}{5} = \dfrac{24}{5}$

- $\dfrac{\frac{6}{5}}{4} = \dfrac{6}{5} \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{6}{20} = \dfrac{3}{10}$

5. Escribir en forma más simple.

- $\sqrt{20} - 3\sqrt{45} = \sqrt{4 \cdot 5} - 3\sqrt{9 \cdot 5} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} - 3\sqrt{9} \cdot \sqrt{5} = 2\sqrt{5} - 3 \cdot 3\sqrt{5} = -7\sqrt{5}$

- $\dfrac{2+\sqrt{6}}{2-\sqrt{6}} = \dfrac{(2+\sqrt{6})(2+\sqrt{6})}{(2-\sqrt{6})(2+\sqrt{6})} = \dfrac{2^2 + (\sqrt{6})^2 + 2 \cdot 2\sqrt{6}}{2^2 - (\sqrt{6})^2} = \dfrac{10+4\sqrt{6}}{-2} = -5 - 2\sqrt{6}$

6. Eliminar los exponentes negativos y escribir en forma más simple.

- $\left(3^{\frac{2}{5}} \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}\right)^{\frac{5}{4}} = \left(3^{\frac{2}{5}} \cdot 3^2\right)^{\frac{5}{4}} = \left(3^{\frac{12}{5}}\right)^{\frac{5}{4}} = 3^{\frac{12 \cdot 5}{5 \cdot 4}} = 3^3 = 27$

Ahora se pueden hacer los ejercicios 1 al 6.

7. Calcular el valor de las siguientes expresiones en cada caso.

$a-(b-c)$ $\qquad$ $a-b-c$ $\qquad$ $a(b-c)$ $\qquad$ $a \cdot b - c$

- $a = 9; b = -\dfrac{1}{3}; c = \dfrac{2}{5}$

$$a-(b-c) = a-b+c = 9 + \frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{146}{15}$$

$$a-b-c = 9 + \frac{1}{3} - \frac{2}{5} = \frac{134}{15}$$

$$a(b-c)=9\left(-\frac{1}{3}-\frac{2}{5}\right)=9\left(-\frac{11}{15}\right)=-\frac{33}{5}$$

$$ab-c=9\left(-\frac{1}{3}\right)-\frac{2}{5}=-3-\frac{2}{5}=-\frac{17}{5}$$

- $a=x; b=\frac{2}{x}; c=-3x$

$$a-(b-c)=a-b+c=x-\frac{2}{x}-3x=\frac{x^2-2-3x^2}{x}=\frac{-2x^2-2}{x}$$

$$a-b-c=x-\frac{2}{x}+3x=\frac{x^2-2+3x^2}{x}=\frac{4x^2-2}{x}$$

$$a(b-c)=x\left(\frac{2}{x}+3x\right)=2+3x^2$$

$$ab-c=x\cdot\frac{2}{x}-(-3x)=2+3x$$

8. Desarrollar.

- $(3x-5)^2=(3x-5)(3x-5)=3x\cdot 3x-5\cdot 3x+3x(-5)+25=9x^2-30x+25$

  O también: $(3x-5)^2=(3x)^2+2\cdot 3x\cdot(-5)+(-5)^2=9x^2-30x+25$

- $(3x+y)(3x-y)=3x\cdot 3x+3x(-y)+y\cdot 3x+y(-y)=9x^2-3xy+3xy-y^2=9x^2-y^2$

  O también: $(3x+y)(3x-y)=(3x)^2-y^2=9x^2-y^2$

- $(2x^2+\sqrt{5})(2x^2-\sqrt{5})=2x^2\cdot 2x^2+2x^2\cdot(-\sqrt{5})+\sqrt{5}\cdot 2x^2-(\sqrt{5})^2=$

  $=4x^4-2\sqrt{5}x^2+2\sqrt{5}x^2-5=4x^4-5$

  O también: $(2x^2+\sqrt{5})(2x^2-\sqrt{5})=(2x^2)^2-(\sqrt{5})^2=4x^4-5$

9. Calcular el valor de las siguientes expresiones en cada caso.

$(3a)^2+b^2$ $\qquad (3a+b)^2$ $\qquad a+\frac{1}{b}$ $\qquad \frac{a+1}{b}$ $\qquad \frac{a+b}{a}$

- $a=-2; b=5$

$$(3a)^2+b^2=\left(3(-2)\right)^2+5^2=36+25=61$$

$$(3a+b)^2=\left(3(-2)+5\right)^2=(-1)^2=1$$

$$a+\frac{1}{b}=-2+\frac{1}{5}=-\frac{9}{5}$$

$$\frac{a+1}{b}=\frac{-2+1}{5}=-\frac{1}{5}$$

$$\frac{a+b}{a}=\frac{-2+5}{-2}=-\frac{3}{2}$$

- $a=2x; b=x-1$

$$(3a)^2+b^2=\left(3\cdot 2x\right)^2+(x-1)^2=36x^2+x^2-2x+1=37x^2-2x+1$$

$$(3a+b)^2=\left(3\cdot 2x+x-1\right)^2=(7x-1)^2=49x^2-14x+1$$

$$a+\frac{1}{b}=2x+\frac{1}{x-1}=\frac{2x(x-1)+1}{x-1}=\frac{2x^2-2x+1}{x-1}$$

$$\frac{a+1}{b}=\frac{2x+1}{x-1}$$

$$\frac{a+b}{a}=\frac{2x+x-1}{2x}=\frac{3x-1}{2x}$$

10. Reducir a una sola fracción

- $\dfrac{3x^2y}{5z}\cdot\dfrac{6x^3}{5y^3z^2}=\dfrac{3\cdot 6\cdot x^2yx^3}{5\cdot 5\cdot zy^3z^2}=\dfrac{18x^5}{25y^2z^3}$

- $\dfrac{\dfrac{14x^3y^2}{3z^4}}{\dfrac{24y^3}{9z^2x}}=\dfrac{14x^3y^2}{3z^4}\cdot\dfrac{9z^2x}{24y^3}=\dfrac{14\cdot 9\cdot x^3y^2z^2x}{3\cdot 24\cdot z^4y^3}=\dfrac{7x^4}{4yz^2}$

- $\dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{-1-x}=\dfrac{\dfrac{x+1}{x}}{-1-x}=\dfrac{x+1}{x}\cdot\dfrac{1}{-1-x}=\dfrac{x+1}{-x(1+x)}=-\dfrac{1}{x}$

11. Hallar el valor de x.

- $\left(\frac{1}{2}x\right)^7 (3x^2)^{-4} = \frac{1}{36}$ $\qquad \frac{1}{2^7} \cdot x^7 \cdot 3^{-4} \cdot x^{-8} = \frac{1}{36}$

$\frac{1}{2^7} \cdot x^7 \cdot \frac{1}{3^4} \cdot \frac{1}{x^8} = \frac{1}{36}$ $\qquad \frac{1}{2^7 3^4 x} = \frac{1}{36}$

$\frac{36}{2^7 3^4} = x$ $\qquad \frac{2^2 3^2}{2^7 3^4} = x$ $\qquad x = \frac{1}{2^5 3^2} = \frac{1}{288}$

- $\frac{\sqrt{3x+1}}{5} = 2$ $\qquad \sqrt{3x+1} = 10$ $\qquad 3x+1 = 10^2$

$3x = 99$ $\qquad x = 33$

12. Escribir en forma mas simple

- $\frac{5x^3 y^{-2} z}{4x^2 y^3 z^{-3}} = \frac{5x^3 z z^3}{4x^2 y^3 y^2} = \frac{5xz^4}{4y^5}$

13. Hallar el valor de x.

- $2x^{\frac{1}{3}} = 3$ $\qquad x^{\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$ $\qquad \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 = \left(\frac{3}{2}\right)^3$ $\qquad x = \frac{27}{8}$

- $\frac{x^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[3]{x}}{x} = \frac{1}{2}$ $\qquad \frac{x^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{3}}}{x} = \frac{1}{2}$ $\qquad x^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{3}} x^{-1} = \frac{1}{2}$ $\qquad x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{2}$ $\qquad x^{-\frac{1}{6}} = \frac{1}{2}$

$\left(x^{-\frac{1}{6}}\right)^6 = \left(\frac{1}{2}\right)^6$ $\qquad x^{-1} = \frac{1}{2^6}$ $\qquad x = 2^6 = 64$

Ahora se pueden hacer los ejercicios 7 al 21.

ECUACIONES LINEALES

Juan utilizó 94,2 metros lineales de chapa para construir un silo; Marcos le preguntó qué radio tenía el silo.
Como el silo es un cilindro y la base es una circunferencia de perímetro 2π por radio, llamamos x al radio de la circunferencia, y planteamos

$$2\pi x = 94,2$$

$$x = \frac{94,2}{2\pi} \qquad \text{si consideramos } \pi \text{ como } 3,14$$

$$x = 15$$

El radio es 15 metros , esa es la respuesta que debe dar Juan.

Lucas utilizó 220 metros de alambre para cercar un terreno rectangular que tiene de fondo 25 metros más que de frente. ¿Qué dimensiones tiene el terreno?

Llamamos x al frente del terreno

$$2x + 2(x+25) = 220$$

$$2x + 2x + 50 = 220$$

$$4x = 220 - 50$$

$$x = 42,5 \qquad x + 25 = 67,5$$

Estos problemas se resolvieron mediante *ecuaciones lineales*.

Una ecuación es una igualdad que contiene uno o más números desconocidos llamados incógnitas.
Una ecuación es lineal si la incógnita está elevada a la primera potencia.

Ejemplos:

$2x + 1 = 7$, $\quad 3(x+5) = -2(5x+2)$, $\quad \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{x+2}{4}$ son ecuaciones lineales.

Resolver una ecuación es encontrar el valor de la incógnita que hace verdadera la igualdad.

Ejemplos:

- $5(x+3) = 2x - 9 \qquad 5x + 15 = 2x - 9 \qquad 5x - 2x = -9 - 15$
  $3x = -24 \qquad x = -8$

- $x + 5\left(3x - \dfrac{2}{3}\right) = -2 \qquad x + 15x - \dfrac{10}{3} = -2 \qquad x + 15x = -2 + \dfrac{10}{3}$

$16x = \frac{4}{3}$ $\qquad x = \frac{4}{3.16} = \frac{1}{12}$

- $\frac{4-3x}{6} - \frac{2+x}{4} = 5 - x$ $\qquad \frac{2(4-3x)-3(2+x)}{12} = 5 - x$

$2(4-3x)-3(2+x) = 12(5-x)$ $\qquad 8-6x-6-3x = 60-12x$

$-6x-3x+12x = 60-8+6$ $\qquad 3x = 58$ $\qquad x = \frac{58}{3}$

- $2x+3-5x = -3(x+1)+2$

$-3x+3 = -3x-3+2$

$-3x+3 = -3x-1$

$3 = -1$ FALSO!!!!

Entonces no hay ningún valor de x que satisfaga la ecuación. En este caso llegar a esta conclusión significa resolver la ecuación.

-

$-2(x+1) = -4(x+2)+2x+6$

$-2x-2 = -4x-8+2x+6$

$-2x-2 = -2x-2$

$0 = 0$ VERDADERO

Esto significa que todos los valores de x satisfacen la ecuación; la ecuación tiene infinitas soluciones.

Ahora se pueden hacer los ejercicios 22 al 41

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Si el lado de un cuadrado se aumenta en 4 cm, el área del cuadrado que se obtiene es igual a 81cm^2. ¿Cuánto mide el lado del cuadrado?

Llamamos x al lado del cuadrado original, planteamos la ecuación y resolvemos

$(x+4)^2 = 81$

$(x+4) = \sqrt{81}$ ó $(x+4) = -\sqrt{81}$

$x = 9-4$ $\quad x = -9-4$

$x = 5$ $\quad x = -13$

Las soluciones de la ecuación son 5 y -13.

Como x representa el lado de un cuadrado la solución negativa no tiene sentido para nuestro problema: el lado del cuadrado mide 5 cm.

El producto de 2 números enteros impares consecutivos es 3. ¿Cuáles son los números? (Un número entero impar es de la forma $2k+1$ con k entero; el consecutivo, o sea el siguiente impar, es $2k+3$.)

Planteamos la ecuación

$(2x+1)(2x+3) = 3$ y resolvemos

$4x^2 + 6x + 2x + 3 = 3$

$4x^2 + 8x = 0$

$4x(x+2) = 0$

$x = 0$ ó $x = -2$

si $x = 0$ $\quad 2x+1$ es 1 , $\quad 2x+3$ es 3 ; esta es una solución, pues $1 \,.3 = 3$

si $x = -2$ $\quad 2x+1$ es -3, $\quad 2x+3$ es -1 ; esta es otra solución, pues $(-1).(-3) = 3$

Estos problemas se resuelven planteando ecuaciones de segundo grado o *cuadráticas*.

Una ecuación es de segundo grado o cuadrática si se puede escribir en la forma $\boldsymbol{a}\, x^2 + \boldsymbol{b}\, x + c = 0$, con $\boldsymbol{a} \neq 0$ (aparece la incógnita elevada al cuadrado) .

Ejemplos:

$5x^2 - 1 = 0$ ($\boldsymbol{b} = 0$) ; $\quad 3x^2 - 2x = 0$ ($c = 0$) ; $\quad (x+\frac{1}{2})(x-3) = 0$

Resolvemos las ecuaciones:

- $5x^2 - 1 = 0$

$$5x^2 = 1$$

$$x^2 = \frac{1}{5}$$

$$x = \sqrt{\frac{1}{5}} \text{ ó } x = -\sqrt{\frac{1}{5}}$$

- $3x^2 - 2x = 0$

$$x(3x-2) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{ó} \quad 3x - 2 = 0$$

$$x = 0 \quad \text{ó} \quad x = \frac{2}{3}$$

- $(x + \frac{1}{2})(x-3) = 0$

$$(x + \frac{1}{2}) = 0 \quad \text{ó} \quad (x-3) = 0$$

$$x = -\frac{1}{2} \quad \text{ó} \quad x = 3$$

Para resolver una ecuación de segundo grado o cuadrática escrita en la forma $ax^2 + bx + c = 0$, recordemos la fórmula:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a} \quad ; \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$$

Si $b^2 - 4ac$ es mayor que cero la ecuación tiene dos soluciones,
si $b^2 - 4ac$ es igual a cero tiene una sola solución,
si $b^2 - 4ac$ es menor que cero no tiene ninguna solución.

Ejemplos:

- $2x^2 - 3x - 2 = 0$ $\qquad x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{2.2}$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{4} \qquad x = \frac{3+5}{4} = 2 \quad \text{ó} \quad x = \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2}$$

Los valores de x son 2 y $-\frac{1}{2}$.

- $\frac{-4 + \sqrt{2x^2 + 2}}{3} = 2 \qquad \sqrt{2x^2 + 2} = 2 \cdot 3 + 4$

$2x^2+2=10^2$ $\quad x^2=\dfrac{100-2}{2}=49$ $\quad x=7$ ó $x=-7$

Los valores de x son 7 y -7.

- $4x^2-12x+9=0$

$$x_{1,2}=\frac{12\pm\sqrt{144-4.4.9}}{8}$$

$$x_{1,2}=\frac{12}{8}$$ tiene una única solución

$$x=\frac{3}{2}$$

- $5x^2-3x+2=0$

$$x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9-4.5.2}}{10}$$ no tiene solución

Como b^2-4ac es menor que cero (es -31), la ecuación no tiene soluciones reales.

Ahora se pueden hacer los ejercicios 42 al 72.