Práctica 10

Geometría

Ejercicio 1. Dados los puntos $P = (3,1)$ y $Q = (1,5) \in \mathbb{R}^2$:

a) Graficarlos en el plano.

b) Calcular y representar gráficamente los puntos $P + Q$, $P - Q$, $3.P$ y $-2.Q$.

c) Hallar a y $b \in \mathbb{R}$ tales que $a.P + b.Q = (5,-3)$. Para los valores hallados, representar gráicamente $a.P$, $b.Q$ y $(5,-3)$.

d) ¿Para qué valores de (x,y) existen a y $b \in \mathbb{R}$ tales que $a.P + b.Q = (x,y)$? (Sugerencia: armar el sistema lineal correspondiente y calcular el determinante).

Ejercicio 2. Sea L la recta que pasa por los puntos $(1,-1)$ y $(-2,2)$:

a) Encontrar dos vectores dirección distintos para L.

b) Dar una ecuación implícita y una paramétrica para L. ¿Son únicas?

c) Decidir cuáles de los siguientes puntos pertenecen a L: $(2,1)$, $(0,0)$, $(-2,3)$, $(x,-x)$.

Ejercicio 3. Dadas las rectas $L_1 : \overrightarrow{X} = \alpha(5,-1) + (2,1)$, L_2 la recta que pasa por los puntos $(0,1)$ y $(-3,2)$, L_3 la recta que pasa por los puntos $(5,5)$ y $(5,-1)$, $L_4 : x + 3y = -1$ y $L_5 : \overrightarrow{X} = \beta(1,0) + (2,1)$:

a) Dar ecuaciones implícitas para L_1, L_2, L_3 y L_5.

b) Dar ecuaciones parameétricas para L_2, L_3 y L_4.

c) Decidir cuáles corresponden al gráfico de una función lineal $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y, en caso afirmativo, hallar su pendiente.

Ejercicio 4. Dadas las rectas $L_1 : -x + 3y = 2$ y $L_2 : -2x + 6y = 5$:

a) Representarlas gráficamente en el mismo plano. ¿Cuál es su po´sición relativa?

b) Encontrar dos vectores dirección para cada una. ¿Qué relación tienen todos los vectores dirección encontrados?

Ejercicio 5.

a) Dar una ecuación paramétrica de la recta paralela a $L: \overrightarrow{X} = \beta(2,-3) + (1,1)$ que pasa por $(0,0)$.

b) Dar una ecuación implícita de la recta paralela a $L: 3x + 2y = 3$ que pasa por $(-1,1)$.

c) Dar una ecuación paramétrica de la recta paralela a $L: x = 2$ que pasa por $(3,8)$.

Ejercicio 6. Hallar, en cada caso, la intersección de las rectas L_1 y L_2:

a) $L_1: 3x + y = -3$ y $L_2: \overrightarrow{X} = \alpha(1,3) + (2,0)$

b) $L_1: -2x + 3y = -13$ y $L_2: y = 7x + 2$

c) $L_1: \overrightarrow{X} = \alpha(-4,1) + (2,1)$ y $L_2: \overrightarrow{X} = \beta(-2,1) + (0,-1)$.

Ejercicio 7. En cada caso, plantear el sistema lineal para obtener la intersección de L_1 y L_2 y, en función de la compatibilidad del sistema, decidir las posiciones relativas de las rectas:

a) $L_1: 2x + y = 3$ y $L_2: 2x - y = 1$

b) $L_1: x + 3y = 6$ y $L_2: -2x - 6y = 2$

c) $L_1: x - 2y = -1$ y $L_2: 3x - 6y = -3$

Ejercicio 8. Sean $L_1: x - 2y = 2$, $L_2: -2x + y = -3$ y $L_3: \overrightarrow{X} = \alpha(1,-7)$. Dar una ecuación paramétrica de la recta L que pasa por el punto de intersección de L_2 y L_3 y es paralela a L_1.

Ejercicio 9. Sea L la recta que pasa por $P = (1,-3)$ y $Q = (2,-4)$. Hallar b tal que la recta que es paralela a L y pasa por $(b,5)$ también pase por $(2,2)$.

Ejercicio 10. En cada caso, calcular el producto escalar indicado entre los vectores de $\mathbb{R}^2$ y determinar si son ortogonales:

a) $\langle (1,-1);(2,4) \rangle$ *b)* $\langle (1,3);(-6,2) \rangle$ *c)* $\langle (1,2);(1,2) \rangle$ *d)* $\langle (-1,0);(0,1) \rangle$

Ejercicio 11.

a) Dar una ecuación paramétrica de la recta perpendicular a $2x - 5y = 3$ que pasa por $P = (2,6)$

b) Dar una ecuación implícita de la recta perpendicular a $y = 4$ que pasa por $P = (3, -1)$

Ejercicio 12. Dada $L_1 : -2x + y = 3$, hallar una ecuación paramétrica de la recta L_2 perpendicular a L_1 que pasa por $(1, 2)$. Verificar que el producto de las pendientes de L_1 y de L_2 da -1.

Ejercicio 13. Sea $P = (4, 9)$ $Q = (-6, 5)$ y $L : y = 2x$. Hallar todos los puntos $A \in L$ tales que:

a) el triángulo PQA sea rectángulo en $\widehat{P}$.

b) el triángulo PQA sea rectángulo en $\widehat{A}$.

Ejercicio 14.

a) Representar gráficamente en $\mathbb{R}^3$ los puntos $A = (2, 0, 0)$, $B = (2, 2, 0)$, $C = (2, 2, 2)$, $D = A + B$ y $E = B - C$.

b) Un cubo tiene vértices en $(0, 0, 0)$, $(2, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ y $(0, 0, 2)$. Escribir las coordenadas de los otros 4 vértices.

Ejercicio 15. En cada caso, calcular el producto escalar y vectorial de los siguientes pares de vectores de $\mathbb{R}^3$ y decidir si son ortogonales, colineales o ninguna de las dos cosas:

a) $(1, 3, 5)$ y $(3, 0, -2)$

b) $(-1, 2, 1)$ y $(6, 1, 4)$

c) $(2, 4, -2)$ y $(-3, -6, 3)$

d) $(1, 0, 0)$ y $(0, 1, 1)$

Ejercicio 16.

a) Encontrar todos los vectores perpendiculares a $(1, -3, 5)$.

b) Encontrar todos los vectores perpendiculares a $(1, -3, 5)$ y $(-1, 0, 2)$ simultáneamente.

Ejercicio 17. En cada caso, dar una ecuación paramétrica de la recta que:

a) tiene dirección $(1, -1, 2)$ y pasa por el origen de coordenadas.

b) tiene dirección $(1, -1, 2)$ y pasa por el punto $(0, 2, -3)$.

c) pasa por los puntos $(1,5,1)$ y $(-4,3,2)$.

d) es paralela a $L: \overrightarrow{X} = \lambda(2,1,-1) + (-2,4,1)$ y pasa por el punto $(0,3,2)$.

e) es perpendicular a $(2,1,3)$ y a $(0,-1,2)$ y pasa por el origen.

f) es perpendicular a las rectas $L_1: \overrightarrow{X} = \lambda(2,1,-1) + (-2,4,1)$ y $L_2: \overrightarrow{X} = \lambda(-1,0,2) + (2,1,0)$ y pasa por el punto $(0,3,2)$.

g) está incluida en el plano coordenado xy y es perpendicular a la recta $L: \overrightarrow{X} = \lambda(-1,2,1) + (-2,0,1)$.

Ejercicio 18. Sean $L_1: \overrightarrow{X} = \lambda(1,2,-1) + (1,3,5)$ y L_2 la recta paralela a L_1 que pasa por el punto $(3,2,4)$.

a) Hallar el punto de L_2 que tiene coordenada $x_3 = 0$.

b) Decidir si los puntos $(-1,-1,7)$ y $(1,-2,6)$ están en L_2.

Ejercicio 19. Dada la recta $L: \overrightarrow{X} = t(1,2,-1) + (0,3,2)$, hallar todos los valores de k para los cuales la recta que pasa por los puntos $(1,-1,1)$ y $(4,k,-2)$ es:

a) paralela a la recta L.

b) perpendicular a la recta L.

Ejercicio 20. Sean $L: \overrightarrow{X} = \beta(1,1,-2) + (0,0,4)$ y $A = (3,1,0)$. Determinar un punto $B \in \mathbb{R}^3$ tal que:

a) la recta que pasa por A y B sea paralela a L.

b) $B \in L$ y la recta que pasa por A y B sea perpendicular a L.

Ejercicio 21. Dadas las rectas

$L_1: \overrightarrow{X} = \alpha(1,2,1) + (2,3,2)$ $\qquad$ $L_2: \overrightarrow{X} = \beta(0,1,-1) + (1,3,-1)$

$L_3: \overrightarrow{X} = \gamma(2,4,2) + (1,5,0)$ $\qquad$ $L_4: \overrightarrow{X} = \delta(2,4,2) + (3,5,3)$

calcular las siguientes intersecciones y dar la posición relativa de las rectas en el espacio:

a) $L_1 \bigcap L_2$ $\qquad$ *b*) $L_1 \bigcap L_3$ $\qquad$ *c*) $L_2 \bigcap L_3$ $\qquad$ *d*) $L_1 \bigcap L_4$

Ejercicio 22. Dar las coordenadas de 3 puntos en $\mathbb{R}^3$ que estén:

a) en el plano coordenado xy

b) en el plano paralelo al plano coordenado xy, que contiene al punto $(0,0,1)$.
(Sugerencia: hacer un gráfico).

Ejercicio 23. En cada caso, escribir una ecuación paramétrica del plano indicado, representarlo en $\mathbb{R}^3$ y calcular su dirección normal:

a) Π_1 plano que pasa por los puntos $A=(0,0,0)$, $B=(1,0,0)$ y $C=(0,1,0)$.

b) Π_2 plano coordenado xy. Comparar con el plano Π_1 del ítem anterior.

c) Π_3 plano que pasa por los puntos $A=(1,3,1)$, $B=(2,1,1)$ y $C=(3,4,1)$.

Ejercicio 24.

a) Hallar una ecuación paramétrica del plano Π_1 que pasa por $A=(2,-1,7)$,
$B=(0,2,3)$ y $C=(2,11,31)$.

b) Verificar que A, B y C pertenecen al plano $\Pi_2 : \overrightarrow{X}=\alpha(1,0,5)+\beta(-1,3,1)+(1,-1,2)$.
Deducir que, como A, B y C no están alineados, Π_1 y Π_2 son el mismo plano.

c) Comparar las ecuaciones paramétricas de Π_1 y de Π_2. ¿Son iguales?

Ejercicio 25. Dar en $\mathbb{R}^3$ ecuaciones implícitas de:

a) todos los planos coordenados.

b) el plano que pasa por $(1,0,-1)$, $(1,2,1)$ y $(-1,0,2)$.

c) el plano $\Pi : \overrightarrow{X}=\alpha(1,0,5)+\beta(-1,3,1)+(1,-1,2)$.

Ejercicio 26. Hallar, si es posible, una ecuación implícita de un plano que contiene a las rectas $L_1 : \overrightarrow{X}=\lambda(1,1,0)+(0,-1,1)$ y $L_2 : \overrightarrow{X}=\lambda(0,1,-1)+(3,2,1)$.

Ejercicio 27. Dar ecuaciones implícitas de:

a) el plano perpendicular a la recta $L_2 : \overrightarrow{X}=\beta(0,1,1)+(1,3,-1)$ que pasa por $(3,2,1)$.

b) el plano perpendicular a la recta $L : \begin{cases} x = 1 \\ y + z = 5 \end{cases}$ que pasa por el punto $(-1, 0, 3)$.

c) el plano paralelo al plano $\Pi_1 : 3x + 2y + z = 1$ que pasa por el punto $(1, 1, 1)$.

d) el plano paralelo al plano $\Pi_2 : \overrightarrow{X} = \alpha(1, 3, 2) + \beta(2, 5, 3) + (3, 2, 1)$ que pasa por el punto $(2, 3, 1)$.

Ejercicio 28. Decidir en cada caso si los planos Π_1 y Π_2 se intersecan. En caso afirmativo dar una ecuación paramétrica de la intersección:

a) $\Pi_1 : y = 0$ y $\Pi_2 : z = 2$

b) $\Pi_1 : x + z = 0$ y $\Pi_2 : y - z = 0$

c) $\Pi_1 : x + y - 2z = 0$ y $\Pi_2 : 2x + z = 2$

d) $\Pi_1 : x + y - z = 0$ y $\Pi_2 : 2x + 2y - 2z = 3$

e) $\Pi_1 : x + y - z = 1$ y $\Pi_2 : 2x + 2y - 2z = 2$

Ejercicio 29. En cada caso, dar ecuaciones implícitas que definan la recta pedida:

a) $L_1 : \overrightarrow{X} = \alpha(1, 3, 1) + (2, 0, 0)$.

b) $L_2 : \overrightarrow{X} = \beta(-3, 0, 1) + (1, 1, 1)$.

c) la recta L_3 perpendicular al plano $\Pi : \overrightarrow{X} = \alpha(1, 0, 5) + \beta(-1, 3, 1) + (1, -1, 2)$ que pasa por $(1, 0, 1)$.

d) la recta L_4 perpendicular al plano $\Pi : 2x + 2y - 2z = 3$ que pasa por el punto $(2, 1, -1)$.

Ejercicio 30. Dadas las rectas

$$L_1 : \begin{cases} x + y - z = 4 \\ x - y - 2z = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad L_2 : \begin{cases} 2x - 3z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$$

decidir si son paralelas, coincidentes, alabeadas o se cortan en un punto.

Ejercicio 31. Encontrar el valor de a para que la recta que pasa por $(1, a, 2)$ y $(1, 5, 4)$ sea paralela a la recta dada por $L : \begin{cases} x = 1 \\ y + z = 5 \end{cases}$.

Ejercicio 32. En cada caso, hallar la intersección de la recta L con el plano Π:

a) $L: \overrightarrow{X} = \alpha(1,2,1) + (2,2,3)$
$\Pi: z = 0$

b) $L: \begin{cases} x+y-z=1 \\ x+z=-2 \end{cases}$ $\quad \Pi: y = 3$

c) $L: \overrightarrow{X} = \alpha(0,1,-1) + (0,1,1)$
$\Pi: y+z = 2$

d) $L: \overrightarrow{X} = \alpha(0,1,-1) + (0,1,1)$
$\Pi: y+z = 0$.

e) $L: \begin{cases} x+y-z=1 \\ x+z=-2 \end{cases}$ $\quad \Pi: \overrightarrow{X} = \alpha(1,0,0) + \beta(0,1,-2) + (0,0,1)$

Ejercicio 33.

a) Calcular el producto mixto entre $(-1,2,1)$, $(6,1,4)$ y $(1,3,5)$.

b) Los puntos $(0,0,0)$, $(1,0,1)$, $(0,1,-3)$ y $(1,2,-1)$ son cuatro de los vértices de un paralelepípedo de forma tal que el $(0,0,0)$ forma aristas con los otros tres. Encontrar los otros cuatro vértices y determinar el volumen del paralelepípedo.

c) Los puntos $(1,1,0)$, $(2,1,4)$, $(5,1,2)$ y $(3,-1,0)$ son cuatro de los vértices de un paralelepípedo de forma tal que el $(1,1,0)$ forma aristas con los otros tres. Determinar el volumen del paralelepípedo.