

Práctica 9

Matrices - Determinantes

Respuestas

Ejercicio 1.

$$a) I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad b) I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c) A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad d) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \qquad e) A = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.

$$a) \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} \in S_1 \text{ para cualesquiera valores } a, b, c, d \text{ y } e.$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \in S_2 \text{ para cualesquiera valores } a, b \text{ y } c.$$

$$b) A \notin S_1 \text{ y } A \notin S_2. \quad B \in S_1 \text{ y } B \in S_2.$$

$$C \in S_1 \text{ y } C \notin S_2. \quad D \notin S_1 \text{ y } D \notin S_2.$$

Ejercicio 3.

$$a) A + B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad A + B + C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 2 & 3 & 6 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{2}A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$2C + B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad -3(A + 2B) = \begin{pmatrix} -9 & -6 & 3 \\ -6 & -18 & -9 \\ 3 & -9 & -9 \end{pmatrix}, \quad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{y } C^t + C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$b) X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 4.

a) $x = -w + 1, y = -1, z = 0, w \in \mathbb{R}$

b) No hay tales valores.

Ejercicio 5.

a) (5)

$$b) \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 6.

$$B.A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}, A.B \text{ no está definida}, B.C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 6 \\ 6 & 4 & -10 \\ 11 & 3 & -2 \end{pmatrix}, C.B = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 0 \\ 1 & -7 & -2 \\ 3 & 7 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A.D + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 16 \\ 2 & 5 & 10 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}, D.A + B \text{ no está definida}, C^2 = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 20 \\ 9 & 3 & 4 \\ -3 & -4 & 11 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 7. $c_{32} = 4$.

Ejercicio 8.

a) $a = -3$ y $b = -5$

b) $a = 4$ o $a = -4$

c) $x = -1$

Ejercicio 9.

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) $A.(v_1 + v_2) = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $A.(v_1 - v_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. El resultado no depende de las soluciones v_1 y v_2 elegidas.

Ejercicio 10. $k \in \mathbb{R} - \{1\}$

Ejercicio 11.

a) En la siguiente matriz de $\mathbb{R}^{4 \times 3}$, el lugar ij corresponde a lo donado por la familia i en el año j (la familia Pérez es la 1, los Hirsch son la familia 2, los Ferraro la familia 3 y los Smith la familia 4):

$$A = \begin{pmatrix} 25000 & 10000 & 12000 \\ 10000 & 3000 & 3600 \\ 3000 & 1000 & 1200 \\ 8000 & 700 & 840 \end{pmatrix}$$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. $A \cdot B = \begin{pmatrix} 47000 \\ 16600 \\ 5200 \\ 9540 \end{pmatrix}$; el lugar $i1$ corresponde al total donado por la familia i .

c) $C = (1 \ 1 \ 1 \ 1)$. $C \cdot A = (46000 \ 14700 \ 17640)$; el lugar $1j$ corresponde al total donado en el año j .

d) $C \cdot A \cdot B = (77340)$ es el total donado por todas las familias en los tres años.

Ejercicio 12. Equipo A es fila 1, equipo B es fila 2, equipo C es fila 3 y equipo D es fila 4. Ganados es columna 1, empatados es columna 2 y perdidos es columna 3:

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 3 \\ 3 & 4 & 8 \\ 4 & 4 & 7 \\ 7 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$M \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 13 \\ 16 \\ 21 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{Puntos de A} \\ \text{Puntos de B} \\ \text{Puntos de C} \\ \text{Puntos de D} \end{array}$$

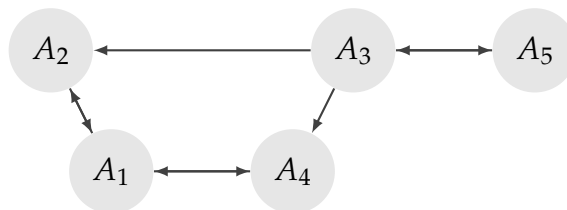
Ejercicio 13. Mujeres menores de 50 años es columna 1, mujeres mayores de 50 años es columna 2, varones menores de 50 años es columna 3 y varones mayores de 50 años es columna 4. Fila 1 es el candidato X, fila 2 el candidato Y y fila 3 es el candidato Z:

$$M = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,5 & 0,25 & 0,3 \\ 0,25 & 0,2 & 0,5 & 0,4 \\ 0,45 & 0,3 & 0,25 & 0,3 \end{pmatrix}$$

$$M \cdot \begin{pmatrix} 7000 \\ 11000 \\ 9000 \\ 7000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11950 \\ 11250 \\ 10800 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{Votos para X} \\ \text{Votos para Y} \\ \text{Votos para Z} \end{array}$$

Ejercicio 14.

a) i) .



ii)

$$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por ejemplo, hay dos formas de ir de A_1 a A_1 con una escala: yendo y viniendo de A_2 o yendo y viniendo de A_4 .

iii)

$$M^2 + M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

El coeficiente ij representa la cantidad de formas de ir en vuelo directo o con una escala de A_i a A_j .

b) i)

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ii)

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

iii)

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El coeficiente ij representa cuántas formas hay de ir de B_i a B_j con exactamente tres escalas.

Ejercicio 15.

a) A no inversible

b) $B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{5}}{5} \\ -1 & \frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$

c) $C^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

d) $D^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 3 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

e) E no inversible

f) $F^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{11}{2} & -3 & \frac{7}{2} \\ -3 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 16.

a) $x = (-5, 4)$

b) $x = (-8, 6, -1)$.

Ejercicio 17.

a) $a \neq 0, c \neq 0, b \in \mathbb{R}$

b) Nunca es inversible

c) $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$

Ejercicio 18.

a) 1, inversible

b) 0, no inversible

c) 0, no inversible

d) 10, inversible

e) 0, no inversible

f) 0, no inversible

Ejercicio 19. $k = -3$.

Ejercicio 20.

a) i) $x = -3$ o $x = 4$ ii) $x = \frac{9}{8}$

b) i) $x \neq -4$ y $x \neq 4$. ii) $x \neq 0$ y $x \neq 2$.

Ejercicio 21. $\det(A) = 8, \det(B) = -3, \det(A.B) = -24, \det(2A) = 64$ y $\det(A + B) = 1$.

Ejercicio 22.

a) $a = -2$

b) $a = -5$ o $a = 5$

Ejercicio 23.

a) $k = 0$ o $k = 1$

b) $k = -4$ o $k = 4$

Ejercicio 24. $x = -1$ o $x = 2$.

Ejercicio 25.

a) $k \neq 1$

b) $k \neq 0$ y $k \neq 3$

Ejercicio 26. $k = 2$ satisface lo pedido.

Ejercicio 27.

a) $k \neq -2$ y $k \neq 2$: sistema compatible determinado; $k = 2$: sistema compatible indeterminado, $k = -2$: sistema incompatible.

b) $k \neq -3$ y $k \neq 3$: sistema compatible determinado; $k = -3$ o $k = 3$: sistema incompatible.