Práctica 8

Sistemas de ecuaciones lineales

Ejercicio 1. Dados los puntos $A = (2,3,-1)$, $B = (1,0,-7)$ y $C = (0,-2,-3)$ en $\mathbb{R}^3$, calcular $A+B$, $A+B+C$, $\frac{1}{2}A$, $2C-B$ y $-3(A+2B)$

Ejercicio 2. En cada caso, decidir cuáles de los puntos A, B, C, D son soluciones del sistema dado:

a) $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -2 \\ -x_1 + 5x_2 - 5x_3 = -3 \end{cases}$$

$A = (0,0,0)$; $B = (-2,1,2)$; $C = (-1,1,1)$; $D = (\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, 0)$.

b) $$\begin{cases} x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$A = (0,0,0,0)$; $B = (2,1,4,3)$; $C = (-2,5,-13,4)$; $D = (0,1,1,-2)$.

Ejercicio 3.

a) Resolver cada uno de los siguientes sistemas en $\mathbb{R}^3$:

i) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$ iii) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = -3 \\ 2x_3 = 4 \end{cases}$

b) Resolver cada uno de los siguientes sistemas en $\mathbb{R}^4$:

i) $\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ x_3 + x_4 = 3 \\ x_4 = 1 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} x_1 + x_4 = 0 \\ -x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$ iii) $\begin{cases} x_1 + x_4 = 1 \\ -x_2 + x_4 = 2 \end{cases}$

Ejercicio 4. Resolver cada uno de los siguientes sistemas aplicando el método de Gauss:

a) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 7 \end{array}\right.$

b) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} & & 3x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ x_1 & & & + & 2x_3 & = & 0 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & - & x_2 & & & = & 3 \\ 4x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 7 \end{array}\right.$

d) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & & & + & x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & - & 3x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \end{array}\right.$

Ejercicio 5. En cada caso, encontrar una matriz triangulada por filas equivalente a la matriz dada para determinar su rango:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & -5 \end{pmatrix}$ *c)* $\begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 & 0 & -9 \\ -1 & 2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 8 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

Ejercicio 6. En cada caso, calcular el rango de la matriz de coeficientes y el de la matriz ampliada del sistema para decidir si es compatible y, en caso afirmativo, resolverlo:

a) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & x_2 & & & = & 3 \\ 3x_1 & & & + & 4x_3 & = & -1 \end{array}\right.$

b) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ -2x_1 & - & x_2 & - & 3x_3 & = & -2 \\ 5x_1 & - & x_2 & + & 11x_3 & = & -3 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} & & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & - & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & & & = & -1 \\ -3x_1 & + & x_2 & & & - & 2x_4 & = & 2 \end{array}\right.$

d) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} & & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & + & 5x_4 & = & 0 \\ -x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & & & + & 3x_3 & - & 2x_4 & = & 0 \end{array}\right.$

e) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = -1 \\ -x_1 + x_3 - 2x_4 = 3 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \end{cases}$

Ejercicio 7. Hallar las soluciones del sistema $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 9x_2 - 7x_3 = -2 \end{cases}$ que verifican la ecuación $x_2 = 0$.

Ejercicio 8. Encontrar todos los puntos de la forma $\alpha(2,2,-2) + (0,1,0)$ que son soluciones del sistema $\begin{cases} x + y + z = -1 \\ -x + y = 1 \end{cases}$

Ejercicio 9. Dado el sistema $\begin{cases} 3x - y + z = 3 \\ x - 2y - 3z = 1 \end{cases}$ agregar una tercera ecuación lineal de manera tal que el sistema resultante tenga a $(0, -2, 1)$ como única solución.

Ejercicio 10. Una compañía de enchapados para joyas de fantasía fabrica dos mezclas distintas, ambas a base de plata y oro. La mezcla Premium lleva 7g de polvo de oro por cada 3g de polvo de plata. La mezcla Standard lleva 4g de polvo de oro por cada 6g de polvo de plata. La compañía posee en este momento un stock de 37kg de polvo de oro y 33kg de polvo de plata. ¿Cuántos kg de cada tipo de mezcla debe fabricar para agotar el stock?

Ejercicio 11. Las harinas de soja y de garbanzos y el trigo burgol intervienen en la composición de tres alimentos fabricados por una empresa: Soji, Garbi y Burgui. En la siguiente tabla se detalla la composición de los mismos:

	Soja	Garbanzos	Trigo burgol
Soji	50 %	30 %	20 %
Garbi	10 %	50 %	40 %
Burgui	20 %	20 %	60 %

La cantidad de toneladas de cada producto a recibir está entre una de las tres opciones siguientes:

	Opción I	Opción II	Opción III
Soja	2	4	6
Garbanzos	3	3	6
Trigo burgol	5	3	8

Determinar las cantidades de los tres alimentos que pueden producirse para cada opción de insumos recibidos si se pretende utilizar todos los insumos.

Ejercicio 12. Un turista que viajó a Europa visitó Berlín, Roma y Praga.
En Berlín gastó por día \$150 en hospedaje y \$100 en alimentos; en Roma gastó por día \$100 en hospedaje y \$150 en alimentos; en Praga gastó por día \$100 en hospedaje y \$100 en alimentos. Por conceptos varios gastó \$50 por día en cada una de las tres ciudades.
A su regreso, el registro de gastos indicaba, en total, \$1700 en hospedaje, \$1600 en alimentos y \$700 en gastos varios.
Decidir si el registro puede ser correcto o no y, en caso afirmativo, calcular cuántos días estuvo el turista en cada una de las tres ciudades.

Ejercicio 13. Resolver cada uno de los siguientes problemas teniendo en cuenta que las soluciones deben ser números enteros no negativos:

a) Una compañía de detergentes fabrica los productos LAV, BRI, CIC y PRO a partir de las tres sustancias AS, SP y TS.

La tabla siguiente muestra, en kg, la cantidad de materia prima necesaria para fabricar un envase de cada producto y el stock en existencia.

	LAV	BRI	CIC	PRO	stock
AS	4	8	4	4	60
SP	2	5	2	3	36
TS	3	7	4	3	50

Encontrar las distintas combinaciones de cantidades de envases que se pueden fabricar utilizando todo el material disponible.

b) Una empresa tiene tres máquinas para fabricar cuatro productos diferentes.

Para producir una unidad del producto A se requieren 1h de la máquina I, 2h de la máquina II y 1h de la máquina III. Para producir una unidad del producto B se requieren 2h de la máquina I y 2h de la máquina III. Para producir una unidad del producto C se requieren 1h de la máquina I, 1h de la máquina II y 3h de la máquina III. Para producir una unidad del producto D se requieren 2h de la máquina I y 1h de la máquina II.

Determinar cuántas unidades se deben fabricar de cada producto en un día de 8 horas, suponiendo que cada máquina se utiliza las 8 horas completas y que debe fabricarse por lo menos una unidad de cada producto.

Ejercicio 14. Clasificar cada uno de los siguientes sistemas en compatible determinado, compatible indeterminado e incompatible según los distintos valores de k:

a) $\left\{\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & 2x_2 & = & k \\ 2x_1 & + & k^2x_2 & = & 4 \end{array}\right.$

b) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & -1 \\ -x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & = & k \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & x_2 & - & 10x_3 & = & 1 \\ -x_1 & - & 3x_2 & & & = & -7 \\ x_1 & & & + & kx_3 & = & 1 \end{array}\right.$

Ejercicio 15. Determinar todos los valores de k para que el sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & -7 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & = & -3 \\ x_1 & - & x_2 & + & kx_3 & = & 5 \end{array}\right.$$

sea compatible.

Ejercicio 16. Determinar todos los valores de k para que el siguiente sistema tenga infinitas soluciones y, para dichos k, resolverlo:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 4x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & -1 \\ 5x_1 & + & 7x_2 & + & kx_3 & = & 4 \end{array}\right.$$

Ejercicio 17. Dados a, $b \in \mathbb{R}$, se sabe que $(1, 2, -1)$ es una solución del sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} ax_1 & + & x_2 & - & bx_3 & = & 1 \\ x_1 & - & ax_2 & + & x_3 & = & 2 \end{array}\right.$$

Encontrar todas sus soluciones.

Ejercicio 18. Encontrar, en cada caso, todos los valores de a y b para los cuales el sistema cuya matriz ampliada es M es compatible:

a) $M = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2a & b \end{array}\right)$

b) $M = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & b \\ 0 & a^2-9 & a-3 & a+b \end{array}\right)$

$c)$ $M = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & 0 & a \\ -1 & 1 & 3 & 3 & b \end{array} \right)$

Ejercicio 19. Hallar todos los valores de a y b tales que los sistemas

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ -2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & -3 \\ x_1 & & & - & ax_3 & = & 2 \end{array} \right. \quad \text{y} \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & = & -2 \\ x_1 & + & a^2x_2 & + & 2x_3 & = & b \end{array} \right.$$

tengan exactamente una solución en común.