Práctica 6

Estudio de funciones - Problemas de optimización

Respuestas

Ejercicio 1.

a) Dom $(f) = \mathbb{R}$, f no es derivable en $x = -1$, f' es positiva en $(-1;1)$, f' es negativa en $(-\infty;-1) \cup (1;+\infty)$, f' es cero en $x = 1$, f tiene un mínimo relativo en $x = -1$ y un máximo relativo en $x = 1$, $f(x) = 2$ tiene 3 soluciones.

b) Dom $(f) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$, f es derivable en todo su dominio, f' es positiva en $(-\infty;-2) \cup (-2;0)$, f' es negativa en $(0;2) \cup (2;+\infty)$, f' es cero en $x = 0$, f tiene un máximo relativo en $x = 0$, $f(x) = 2$ tiene 4 soluciones.

c) Dom $(f) = \mathbb{R}$, f no es derivable en $x = 0$, f' es positiva en $(-\infty;-1) \cup (0;1)$, f' es negativa en $(-1;0) \cup (1;+\infty)$, f' es cero en $x = -1$ y en $x = 1$, f tiene un mínimo relativo en $x = 0$ y máximos relativos en $x = -1$ y en $x = 1$, $f(x) = 2$ tiene 3 soluciones.

d) Dom $(f) = (1;+\infty)$, f es derivable en todo su dominio, f' es positiva en $(1;+\infty)$, f' nunca es negativa ni nunca vale cero, f no tiene extremos relativos, $f(x) = 2$ tiene 1 solución.

e) Dom $(f) = \mathbb{R}$, f no es derivable en $x = 0$, f' es positiva en $(2;+\infty)$, f' es negativa en $(0;2)$, f' vale cero en $(-\infty;0)$, f tiene un mínimo relativo en $x = 2$ (según la definición de algunos libros, también cualquier punto en $(-\infty;0)$ es un mínimo relativo y un máximo relativo, y $x = 0$ es un máximo relativo), $f(x) = 2$ tiene 1 solución.

f) Dom $(f) = \mathbb{R}$, f es derivable en todo $\mathbb{R}$, f' es positiva en $(-\infty;-2) \cup (2;+\infty)$, f' es negativa en $(-2;2)$, f' vale cero en $x = -2$ y en $x = 2$, f tiene un máximo relativo en $x = -2$ y un mínimo relativo en $x = 2$, $f(x) = 2$ tiene 3 soluciones.

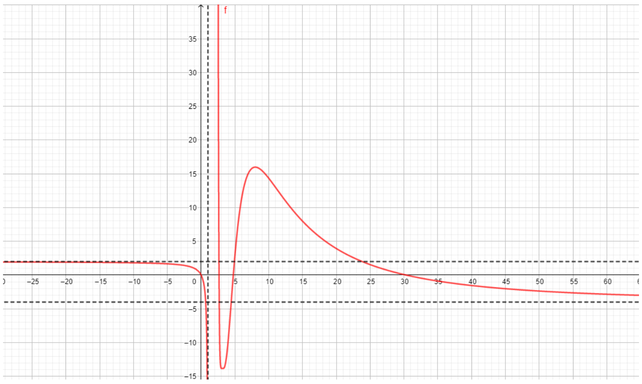
Ejercicio 2.

a) Intervalos de crecimiento de f: $(-\infty;-4)$ y $(0;2)$; intervalos de decrecimiento de f: $(-4;0)$ y $(2;+\infty)$.

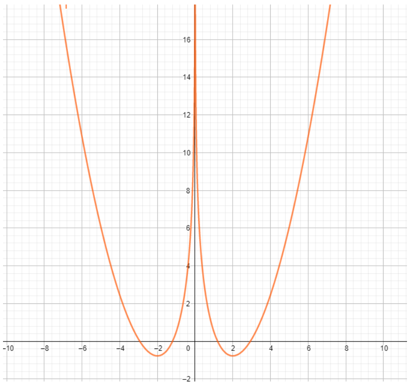
b) Máximos locales en $x = -4$ y en $x = 2$; mínimo local en $x = 0$.

Ejercicio 3.

a) Máximo relativo en $x = 8$, mínimo relativo en $x = 3$



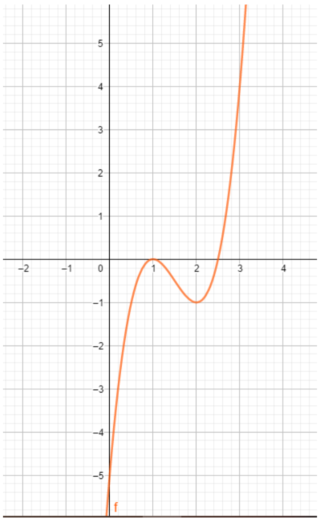
b) Mínimos relativos en $x = -2$ y en $x = 2$



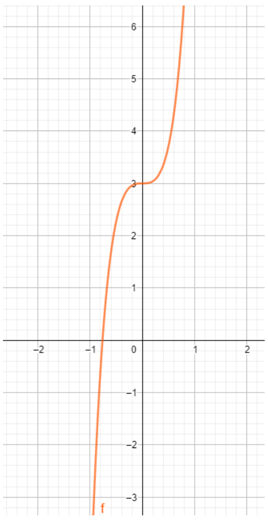
Ejercicio 4.

a) Intervalos de crecimiento: $(-2; 0)$ y $(1; +\infty)$, intervalos de decrecimiento: $(-\infty; -2)$ y $(0; 1)$, máximo relativo en $x = 0$, mínimos relativos en $x = -2$ y en $x = 1$, $\lim\limits_{+x \to -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

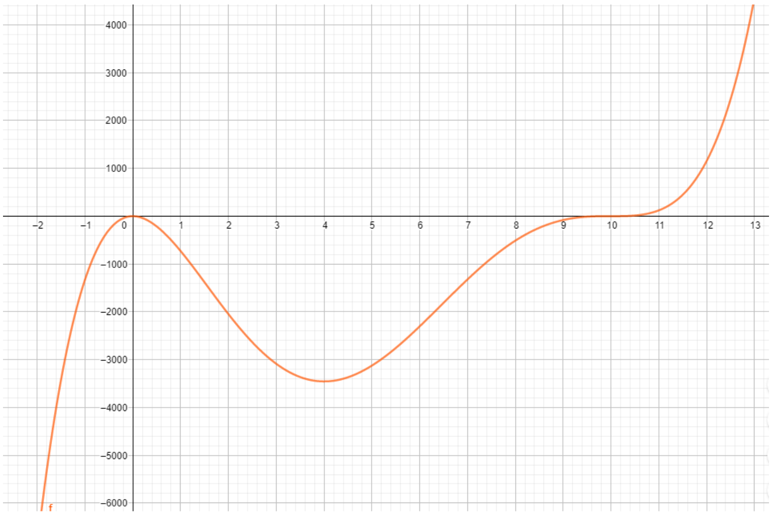
b) Intervalos de crecimiento: $(-\infty;1)$ y $(2;+\infty)$, intervalo de decrecimiento: $(1;2)$, máximo relativo en $x = 1$, mínimo relativo en $x = 2$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$



c) Intervalo de crecimiento: $\mathbb{R}$, intervalos de decrecimiento: no tiene , no tiene máximo ni mínimo relativo: , $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

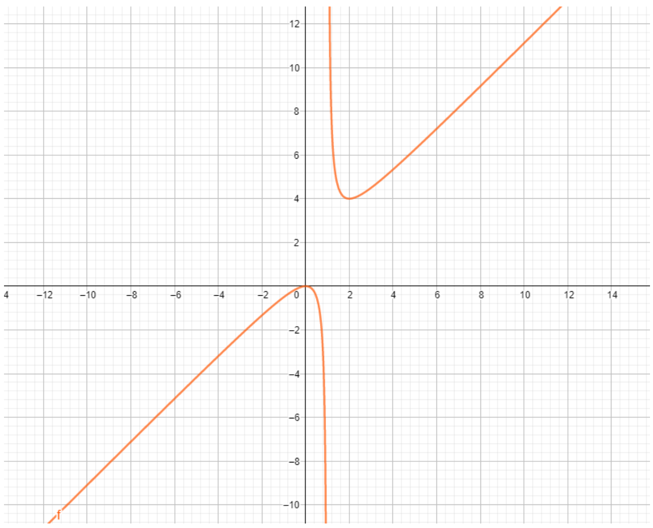


d) Intervalos de crecimiento: $(-\infty;0)$ y $(4;+\infty)$, intervalo de decrecimiento: $(0;4)$, máximo relativo en $x=0$, mínimo relativo en $x=4$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

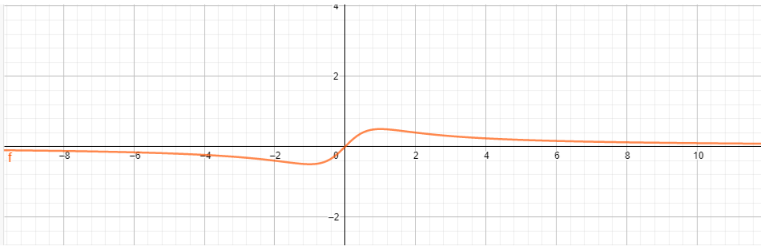


Ejercicio 5.

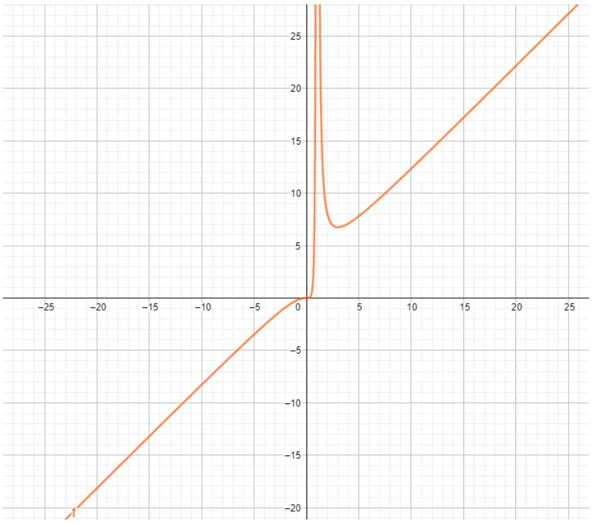
a) $\mathrm{Dom}\,(f)=\mathbb{R}-\{1\}$, intervalos de crecimiento: $(-\infty;0)$ y $(2;+\infty)$, intervalos de decrecimiento: $(0;1)$ y $(1;2)$, máximo relativo en $x=0$, mínimo relativo en $x=2$, asíntota vertical: $x=1$, no tiene asíntotas horizontales.



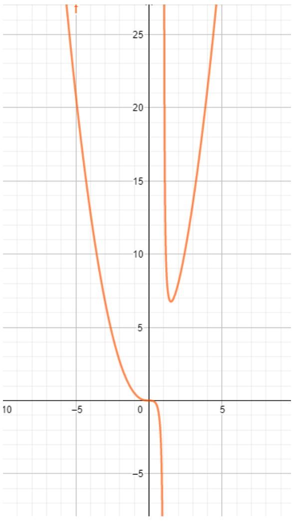
b) Dom $(f) = \mathbb{R}$, intervalo de crecimiento: $(-1;1)$, intervalos de decrecimiento: $(-\infty;-1)$ y $(1;+\infty)$, máximo relativo en $x = 1$, mínimo relativo en $x = -1$, no tiene asíntotas verticales, asíntota horizontal $y = 0$.



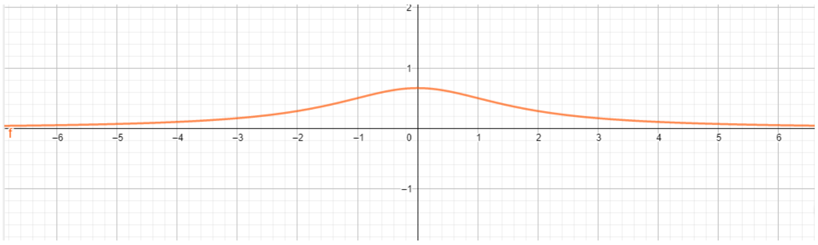
c) Dom $(f) = \mathbb{R} - \{1\}$, intervalos de crecimiento: $(-\infty;1)$ y $(3;+\infty)$, intervalo de decrecimiento: $(1;3)$, no tiene máximos relativos , mínimo relativo en $x = 3$, asíntota vertical $x = 1$, no tiene asíntotas horizontales.



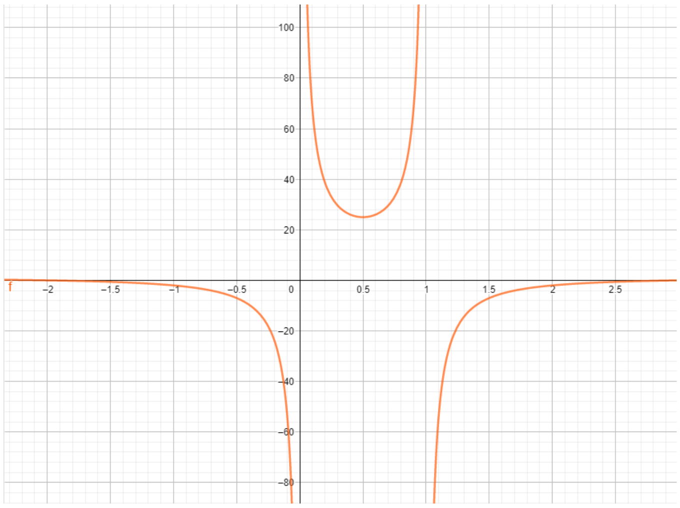
d) Dom $(f) = \mathbb{R} - \{1\}$, intervalo de crecimiento: $(\frac{3}{2}; +\infty)$, intervalos de decrecimiento: $(-\infty; 1)$ y $(1; \frac{3}{2})$, no tiene máximos relativos , mínimo relativo en $x = \frac{3}{2}$, asíntota vertical $x = 1$, no tiene asíntotas horizontales.



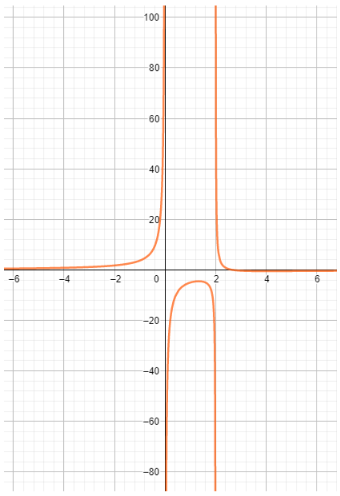
e) Dom $(f) = \mathbb{R}$, intervalo de crecimiento: $(-\infty; 0)$, intervalo de decrecimiento: $(0; +\infty)$, máximo relativo en $x = 0$, no tiene mínimos relativos, no tiene asíntotas verticales, asíntota horizontal $y = 0$.



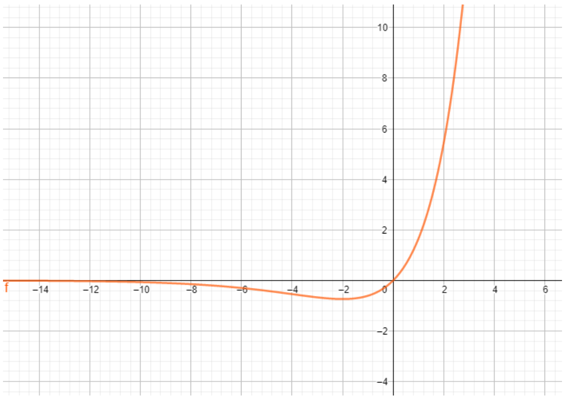
f) $\text{Dom}\,(f) = \mathbb{R} - \{0;1\}$, intervalos de crecimiento: $(\frac{1}{2};1)$ y $(1;+\infty)$, intervalos de decrecimiento: $(-\infty,0)$ y $(0;\frac{1}{2})$, no tiene máximos relativos, mínimo relativo en $x = \frac{1}{2}$, asíntotas verticales $x = 0$ y $x = 1$, asíntota horizontal $y = 1$.



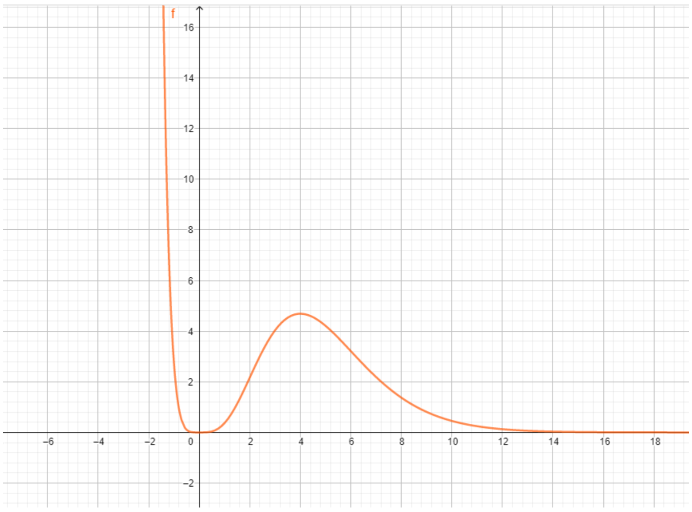
g) $\text{Dom}\,(f) = \mathbb{R} - \{0;2\}$, intervalos de crecimiento: $(-\infty;0)$, $(0;\frac{4}{3})$ y $(4;+\infty)$, intervalos de decrecimiento: $(\frac{4}{3},2)$ y $(2;4)$, máximo relativo en $x = \frac{4}{3}$, mínimo relativo en $x = 4$, asíntotas verticales $x = 0$ y $x = 2$, asíntota horizontal $y = 0$.



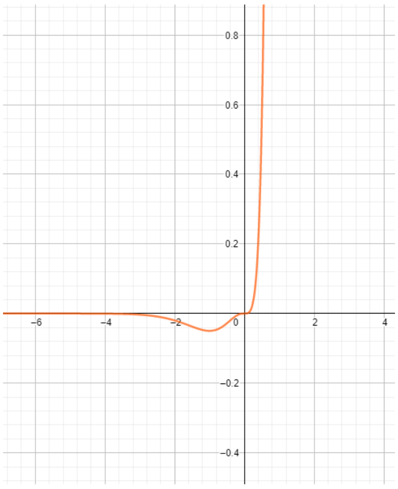
h) Dom $(f) = \mathbb{R}$, intervalo de crecimiento: $(-2;+\infty)$, intervalo de decrecimiento: $(-\infty;-2)$, no tiene máximos relativos, mínimo relativo en $x = -2$, no tiene asíntotas verticales, asíntota horizontal $y = 0$ en $-\infty$



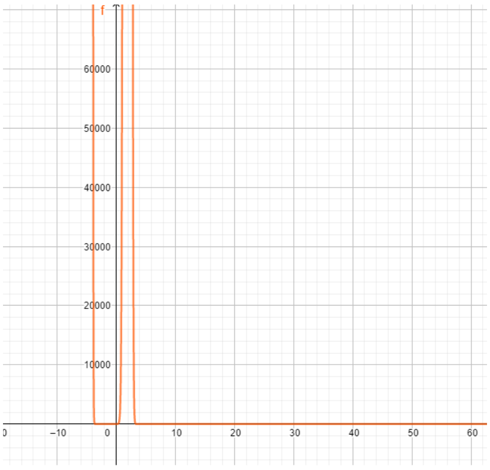
i) Dom $(f) = \mathbb{R}$, intervalo de crecimiento: $(0;4)$, intervalos de decrecimiento: $(-\infty;0)$ y $(4,+\infty)$, máximo relativo en $x = 4$, mínimo relativo en $x = 0$, no tiene asíntotas verticales, asíntota horizontal $y = 0$ en $+\infty$



j) Dom $(f) = \mathbb{R}$, intervalo de crecimiento: $(-1; +\infty)$, intervalo de decrecimiento: $(-\infty; -1)$, no tiene máximos relativos, mínimo relativo en $x = -1$, no tiene asíntotas verticales, asíntota horizontal $y = 0$ en $-\infty$

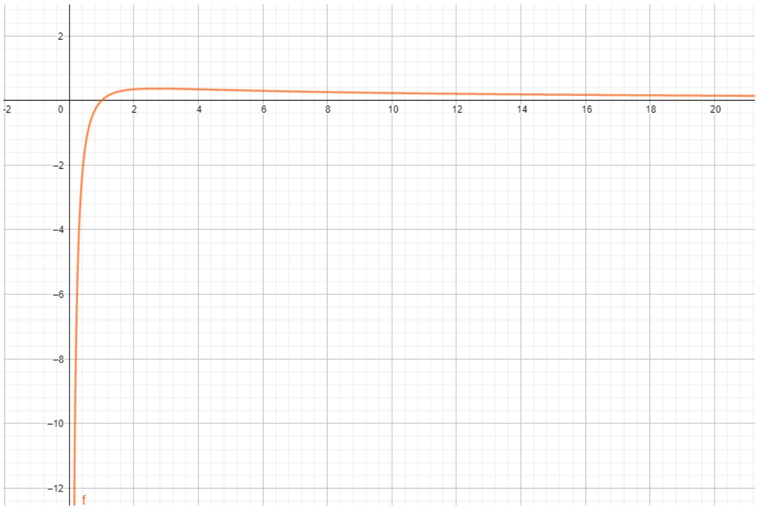


k) Dom $(f) = \mathbb{R}$, intervalo de crecimiento: $(-2; 2)$, intervalos de decrecimiento: $(-\infty; -2)$ y $(2; +\infty)$, máximo relativo en $x = 2$, mínimo relativo en $x = -2$, no tiene asíntotas verticales, asíntota horizontal $y = 0$ en $+\infty$

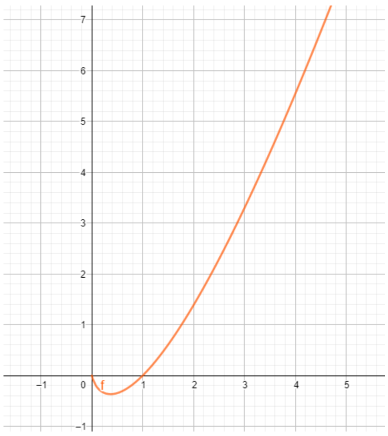


La escala del gráfico no permite ver como crece la función, $f(2) > 8000000$.

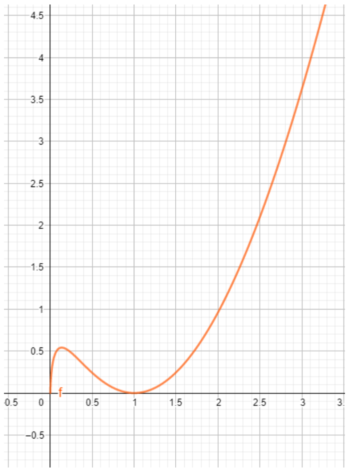
l) Dom $(f) = (0; +\infty)$, intervalo de crecimiento: $(0; e)$, intervalo de decrecimiento: $(e; +\infty)$, máximo relativo en $x = e$, no tiene mínimos relativos, asíntota vertical en $x = 0$, asíntota horizontal $y = 0$ en $+\infty$



m) Dom $(f) = (0; +\infty)$, intervalo de crecimiento: $(\frac{1}{e}; +\infty)$, intervalo de decrecimiento: $(0; \frac{1}{e})$, no tiene máximos relativos, mínimo relativo en $x = \frac{1}{e}$, no tiene asíntotas verticales ni horizontales,

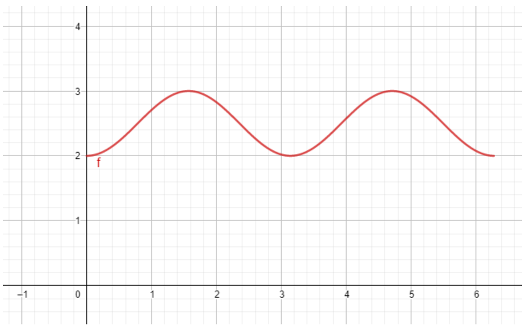


n) Dom $(f) = (0; +\infty)$, intervalos de crecimiento: $(0; \frac{1}{e^2})$ y $(1; +\infty)$, intervalo de decrecimiento: $(\frac{1}{e^2}; 1)$, máximo relativo en $x = \frac{1}{e^2}$, mínimo relativo en $x = 1$, no tiene asíntotas verticales ni horizontales,

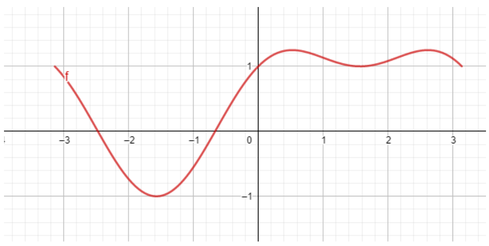


Ejercicio 6.

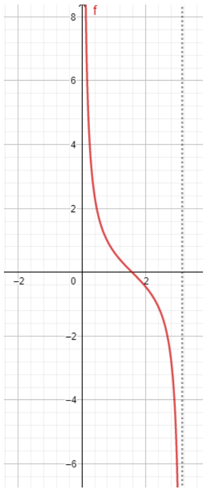
a) Intervalos de crecimiento: $(0; \frac{\pi}{2})$ y $(\pi; \frac{3}{2}\pi)$, intervalos de decrecimiento: $(\frac{\pi}{2}; \pi)$ y $(\frac{3}{2}\pi; 2\pi)$, máximos relativos en $x = \frac{\pi}{2}$ y en $x = \frac{3}{2}\pi$, mínimos relativos en $x = 0$, en π y en 2π, no tiene asíntotas verticales.



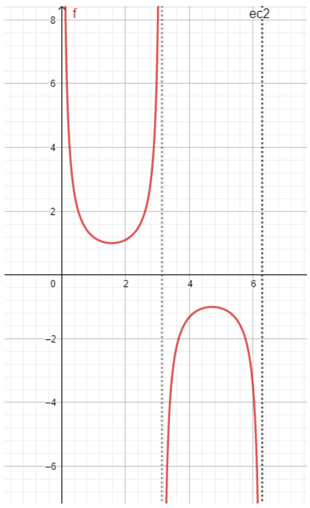
b) Intervalos de crecimiento: $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{6})$ y $(\frac{\pi}{2}; \frac{5}{6}\pi)$, intervalos de decrecimiento: $(-\pi; -\frac{\pi}{2})$; $(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2})$ y $(\frac{5}{6}\pi; \pi)$, máximos relativos en $x = -\pi$, en $x = \frac{\pi}{6}$ y en $x = \frac{5}{6}\pi$ mínimos relativos en $x = -\frac{\pi}{2}$, en $x = \frac{\pi}{2}$ y en $x = \pi$, no tiene asíntotas verticales.



c) Intervalo de crecimiento: $\emptyset$, intervalo de decrecimiento: $(0;\pi)$, no tiene extremos relativos , asíntotas verticales $x=0$ y $x=\pi$.



d) Intervalos de crecimiento: $(\frac{\pi}{2};\pi)$ y $(\pi;\frac{3}{2}\pi)$, intervalos de decrecimiento: $(0;\frac{\pi}{2})$ y $(\frac{3}{2}\pi;2\pi)$, máximos relativo en $x=\frac{3}{2}\pi$, mínimo relativo en $x=\frac{\pi}{2}$, asíntotas verticales $x=0$, $x=\pi$ y $x=2\pi$.



Ejercicio 7.

a) $k=-5$ o $k=5$

b) Si $k=-5$ hay un máximo relativo en $x=-1$ y un mínimo relativo en $x=1$. Si $k=5$ hay un máximo relativo en $x=-1$ y un mínimo relativo en $x=1$.

Ejercicio 8. $k=12$. Si $k=12$ hay un máximo relativo en $x=-2$ y un mínimo relativo en $x=2$.

Ejercicio 9.

a) Intervalo de crecimiento: $(1;3)$, intervalo de decrecimiento: $(3;4)$, máximo relativo en $x=3$, mínimos relativos en $x=1$ y en $x=4$, máximo absoluto en $x=3$, mínimo absoluto en $x=4$.

b) Intervalo de crecimiento: $(-3;0)$, intervalo de decrecimiento: $(0;2)$, máximo relativo en $x=0$, mínimos relativos en $x=-3$ y en $x=2$, máximo absoluto en $x=0$, mínimo absoluto en $x=-3$.

c) Intervalo de crecimiento: $(0;8)$, intervalo de decrecimiento: $(-1;0)$, máximos relativos en $x=-1$ y en $x=8$, mínimo relativo en $x=0$, máximo absoluto en $x=8$, mínimo absoluto en $x=0$.

d) Intervalos de crecimiento: $(-1;-\frac{\sqrt{5}}{11})$ y $(\frac{\sqrt{5}}{11};1)$, intervalo de decrecimiento: $(-\frac{\sqrt{5}}{11};\frac{\sqrt{5}}{11})$, máximo relativo en $x=-\frac{\sqrt{5}}{11}$, mínimo relativo en $x=\frac{\sqrt{5}}{11}$.

Ejercicio 10. Los primeros 10 minutos la concentración aumenta, alcanza su máximo a los 10 minutos y luego la concentración disminuye.

Ejercicio 11. La temperatura máxima es 39° C y se alcanza exactamente después de una hora de administrar la droga.

Ejercicio 12.

a) La segunda droga $\left(\frac{4}{e^2} > \frac{1}{e}\right)$.

b) La primera droga $(1<2)$.

Ejercicio 13.

a) 1000.

b) La derivada es positiva.

c) 5000.

Ejercicio 14. $16 = 8+8$

Ejercicio 15. 10. 5.

Ejercicio 16. $(1,8)$.

Ejercicio 17. 6 y 6.

Ejercicio 18.

a) Base y altura igual a 8

b) Base y altura igual a 8

Ejercicio 19. Base y altura igual a $1,6\,\mathrm{m}$.

Ejercicio 20. La zona a cercar será un rectángulo de $1000\,\mathrm{m}$ por $2000\,\mathrm{m}$.

Ejercicio 21. 105 árboles.