Práctica 6

Estudio de funciones - Problemas de optimización

Ejercicio 1. En cada uno de los siguientes casos, analizando el gráfico de la función f, determinar:

i) El dominio de f.

ii) En qué puntos del dominio de f no existe la derivada de f.

iii) El conjunto $\{x \in \mathbb{R} \ / \ f'(x) > 0\}$

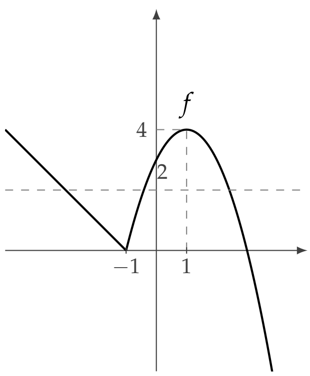
iv) El conjunto $\{x \in \mathbb{R} \ / \ f'(x) < 0\}$

v) El conjunto $\{x \in \mathbb{R} \ / \ f'(x) = 0\}$

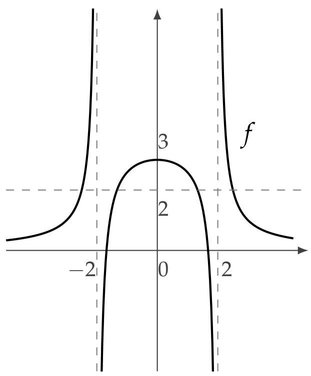
vi) Los máximos y mínimos relativos de f.

vii) La cantidad de soluciones de la ecuación $f(x) = 2$.

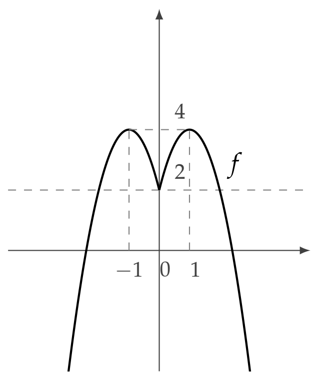
a)



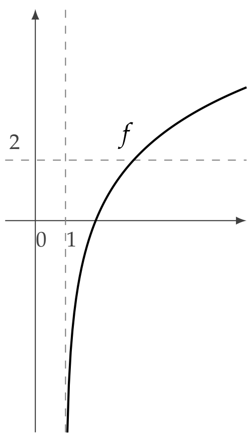
b)



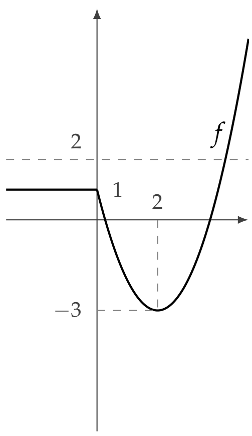
c)



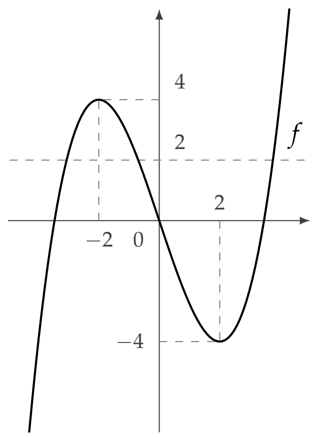
d)



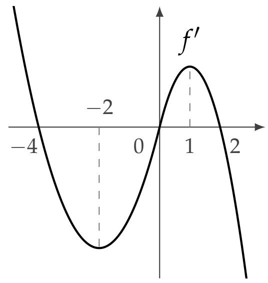
e)



f)



Ejercicio 2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable tal que el gráfico de su función derivada f' es



a) Hallar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

b) Ubicar los valores de x donde f alcanza sus máximos y mínimos locales.

Ejercicio 3. En cada uno de los siguientes casos, trazar el gráfico de una función f que satisfaga simultáneamente las siguientes condiciones y decir para qué valores de x la función alcanza máximos o mínimos relativos:

a)
- f es continua en $\mathbb{R} - \{1\}$
- $f'(x) > 0$ en $(3;8)$
- $f'(x) < 0$ en $(-\infty;1) \cup (1;3) \cup (8;+\infty)$
- $x = 1$ es una asíntota vertical del gráfico de f
- $y = -4$ es una asíntota horizontal del gráfico de f en $+\infty$
- $y = 2$ es una asíntota horizontal del gráfico de f en $-\infty$

b)
- $\mathrm{Dom}\,(f) = \mathbb{R} - \{0\}$
- $f'(x) > 0$ en $(-2;0) \cup (2;+\infty)$
- $f'(x) < 0$ en $(-\infty;-2) \cup (0;2)$
- $f'(x) = 0$ en $x = -2$ y en $x = 2$
- $x = 0$ es una asíntota vertical del gráfico de f
- El gráfico de f no tiene asíntotas horizontales.

Ejercicio 4. En cada uno de los siguientes casos, estudiar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, los máximos y mínimos relativos, los límites en $+\infty$ y $-\infty$ de f y, utilizando esta información, hacer un gráfico aproximado:

a) $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 7$

b) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$

c) $f(x) = 3x^5 + 5x^3 + 3$

d) $f(x) = (x-10)^3 x^2$

Ejercicio 5. En cada uno de los siguientes casos, hallar el dominio, los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, los extremos locales de f y las asíntotas verticales y horizontales a su gráfico. Utilizar la información obtenida para hacer un gráfico aproximado de f:

a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$

b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

c) $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$

d) $f(x) = \dfrac{x^3}{x-1}$

e) $f(x) = 2(x^2+3)^{-1}$

f) $f(x) = \dfrac{x^2-x-6}{x^2-x}$

g) $f(x) = \dfrac{8-3x}{x^2-2x}$

h) $f(x) = xe^{\frac{x}{2}}$

i) $f(x) = x^4 e^{-x}$

j) $f(x) = x^3 e^{3x}$

k) $f(x) = e^{-x^3+12x}$

l) $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$

m) $f(x) = x\ln(x)$

n) $f(x) = x\ln^2(x)$

Ejercicio 6. En cada uno de los siguientes casos, hallar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, los máximos y mínimos relativos de f y las asíntotas verticales a su gráfico en el intervalo indicado. Usar la información obtenida para hacer un gráfico aproximado de f:

a) $f(x) = 2 + \operatorname{sen}^2(x)$ en $[0; 2\pi]$

b) $f(x) = \operatorname{sen}(x) + \cos^2(x)$ en $[-\pi; \pi]$

c) $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}$ en $(0; \pi)$

d) $f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}(x)}$ en $(0;\pi) \cup (\pi; 2\pi)$

Ejercicio 7. Sea $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{(5x-k)^2}{x}$ con k constante.

a) Hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales f tiene un punto crítico en 1.

b) Para cada valor de k hallado, determinar todos los extremos relativos de f.

Ejercicio 8. Sea $f(x) = e^{x^3-kx}$ con k constante. Determinar el valor de $k \in \mathbb{R}$ para que f tenga un extremo relativo en $x = 2$. Para el valor de k hallado, determinar todos los máximos y mínimos relativos de f.

Ejercicio 9. En cada uno de los siguientes casos, hallar los intevalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos y absolutos de f en el intervalo indicado:

a) $f(x) = -x^2 + 6x$ en $[1;4]$

b) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 2$ en $[-3;2]$

c) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ en $[-1;8]$

d) $f(x) = x^{\frac{5}{3}}(x^2-1)$ en $[-1;1]$

Ejercicio 10. La concentración de un fármaco en la sangre t horas después de ser inyectado está dada por la función $C(t) = \dfrac{3t+2}{4t^2+1}$. Calcular el intervalo de tiempo en el que la concentración aumenta, el intervalo en el que disminuye y el momento en el que es máxima.

Ejercicio 11. En pacientes con cierta enfermedad, se sabe que si se le administra cierta droga cuando tienen 38° C, la temperatura T en grados centígrados h horas después está dada por la función $T(h) = 37 + 2e^{-\frac{(h-1)^2}{1{,}44}}$. ¿Cuál será la temperatura máxima alcanzada? ¿En qué momento se alcanza?

Ejercicio 12. Las funciones $C_1(t) = te^{-t}$ y $C_2(t) = t^2e^{-t}$ expresan la concentración en sangre de dos drogas distintas t horas después de administradas.

a) ¿Cuál de las dos drogas alcanza mayor concentración?

b) ¿Cuál alcanza la concentración máxima en menor tiempo?

Ejercicio 13. Las poblaciones de seres vivos comienzan creciendo según una curva exponencial. Sin embargo, si no hay catástrofes (epidemias, incendios, poderosos depredadores), llegan a invadir su propio espacio vital y su crecimiento se va amortiguando. La función logística dada por $p(t) = \dfrac{\ell}{1+ke^{-at}}$ donde ℓ, k y a son constantes positivas adecuadas, proporciona un modelo apropiado para describir este tipo de fenómenos.
Consideremos la función logística dada por $\ell = 5000$, $k = 4$ y $a = 0{,}1$:

a) Calcular la población existente en tiempo $t = 0$.

b) Calcular el signo de la derivada p' y deducir que la función p es creciente.

c) Calcular hacia qué valor tiende la población a medida que pasa el tiempo.

Ejercicio 14. Descomponer el número 16 en dos sumandos tales que su producto sea máximo.

Ejercicio 15. Hallar el menor valor que se puede obtener al sumar un número positivo con 25 veces su inverso. ¿Para qué número se alcanza dicho mínimo?

Ejercicio 16. Hallar el punto de la recta $y = 3x + 5$ que está a menor distancia del punto $P = (4, 7)$.

Ejercicio 17. Hallar dos números tales que su suma sea igual a 12 y la suma de sus cuadrados sea mínima.

Ejercicio 18. Hallar las dimensiones que debe tener un rectángulo de área 64 para que

a) su perímetro sea mínimo.

b) su diagonal sea lo más corta posible.

Ejercicio 19. Un constructor debe hacer una ventana rectangular y dispone, para el marco, de 6,40 m de varilla metálica. Hallar las dimensiones de la ventana si se pretende que el área de abertura sea máxima.

Ejercicio 20. En un terreno, se decide cercar una zona rectangular y dividirla en tres porciones iguales mediante dos cercas paralelas a dos de los lados del terreno. Si el alambre total que va a usarse es de 8000 m, encontrar las dimensiones de la zona a cercar con mayor área posible.

Ejercicio 21. El dueño de una huerta de manzanas calcula que si siembra 60 árboles por hectárea, cada árbol maduro dará 750 manzanas al año. Por cada árbol más que siembre por hectárea, el número de manzanas producidas por árbol al año disminuirá en 5. ¿Cuántos árboles debe plantar por hectárea para obtener el mayor número posible de manzanas al año?