

Práctica 4

Límite de funciones - Asíntotas - Continuidad

Respuestas

Ejercicio 1.

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$
 c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 5$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 4$
 e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ no existen.

Ejercicio 2.

- a) $+\infty$ b) $-\infty$ c) 0
 d) 5 e) $-\infty$ f) 0
 g) $+\infty$ h) 0 i) $-\frac{1}{2}$
 j) $-\infty$ k) -6 l) 0
 m) -1 n) $+\infty$ ñ) 3 o) $+\infty$

Ejercicio 3.

- a) $-\infty$ b) 0 c) $-\infty$
 d) $-\infty$ e) 0 f) $-\infty$
 g) 1 h) 0 i) $+\infty$ j) $+\infty$

Ejercicio 4.

- a) $y = -3$ b) $y = -2$ c) $y = 0$
 d) No existen e) $y = 1$ f) $y = 6$

g) $y = 2$ en $-\infty$

h) No existen

Ejercicio 5.

a) $a = \frac{1}{2}$

b) $a = -4$

c) $a = -9$

d) $a = 3$

Ejercicio 6.

a) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$

Asíntota vertical: $x = 3$

Asíntota horizontal: $y = -1$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Asíntota vertical: $x = 0$

Asíntota horizontal: no tiene.

c) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$

Asíntota vertical: $x = 0$

Asíntota horizontal: $y = -2$

d) $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

Asíntotas verticales: $x = -3$ y $x = 2$

Asíntota horizontal: $y = 0$

e) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$

Asíntota vertical: $x = 0$ (cuando se acerca por $x > 0$)

Asíntota horizontal: $y = 1$

f) $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$

Asíntota vertical: $x = -1$

Asíntotas horizontales: $y = -2$ (en $-\infty$) e $y = 3$ (en $+\infty$)

Ejercicio 7.

a) 11

b) -4

c) $-\infty, +\infty$

d) $-\infty, +\infty$

e) $+\infty, +\infty, +\infty$

f) 2, 2, 2

g) $-\infty, +\infty$

h) $\frac{4}{5}, +\infty, -\infty$

i) $+\infty, 0$

j) $+\infty, -\infty$

k) $-\infty, -\infty, -\infty$

Ejercicio 8.

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}\}$, A. V. $x = -\frac{1}{2}$ b) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{2\}$, A. V. $x = 2$

c) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-2, 3\}$, A. V. $x = -2$ y $x = 3$

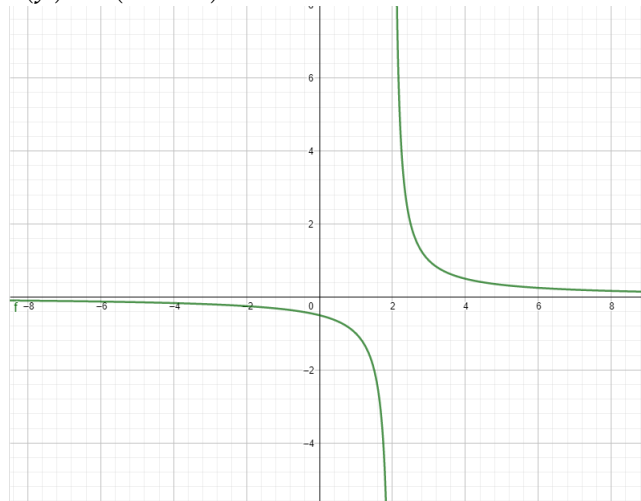
d) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-3, 5\}$, A. V. $x = 5$

e) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$, A. V. $x = 1$ acercándose por $x > 1$

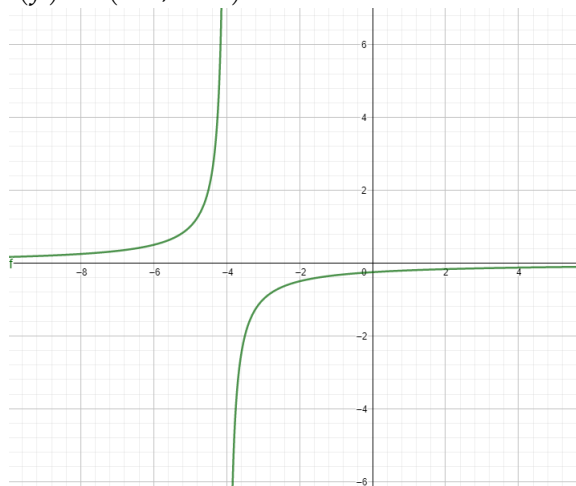
f) $\text{Dom}(f) = (-\frac{3}{2}; +\infty)$, A. V. $x = -\frac{3}{2}$

Ejercicio 9.

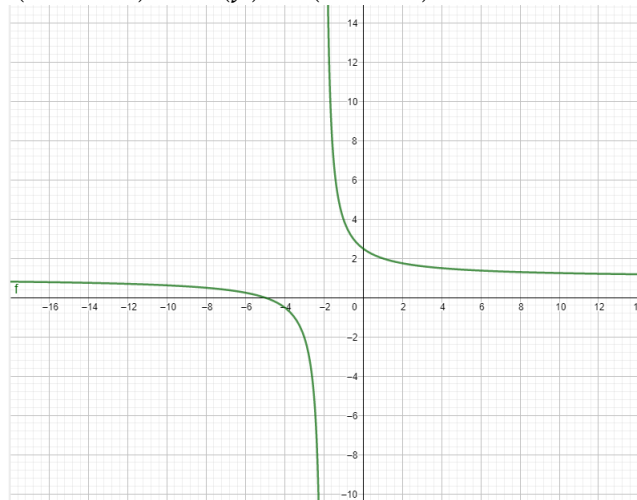
a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{2\}$, $\text{Im}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$, $C^0(f) = \emptyset$, A. V. $x = 2$, A. H. $y = 0$,
 $C^+(f) = (2; +\infty)$, $C^-(f) = (-\infty; 2)$



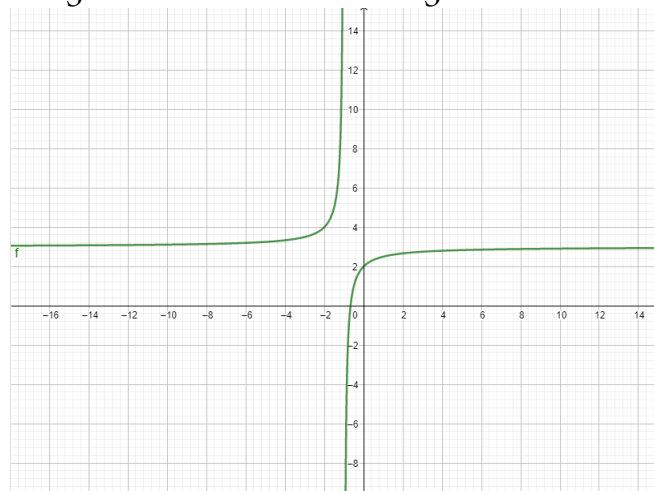
b) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-4\}$, $\text{Im}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$, $C^0(f) = \emptyset$, A. V. $x = -4$, A. H. $y = 0$,
 $C^+(f) = (-\infty; -4)$, $C^-(f) = (-4; +\infty)$



- c) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$, $\text{Im}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$, $C^0(f) = \{-5\}$, A. V. $x = -2$, A. H. $y = 1$,
 $C^+(f) = (-\infty; -5) \cup (-2; +\infty)$, $C^-(f) = (-5; -2)$



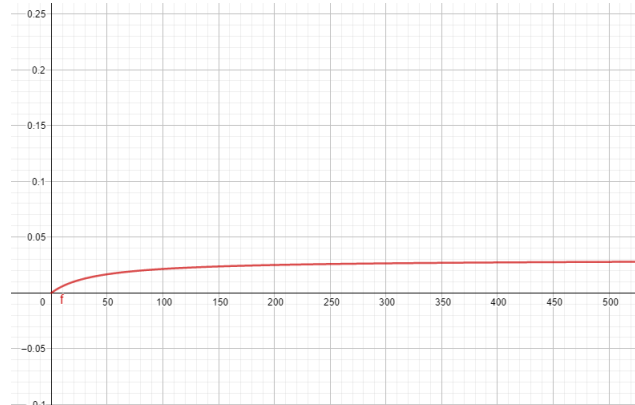
- d) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$, $\text{Im}(f) = \mathbb{R} - \{3\}$, $C^0(f) = \{-\frac{2}{3}\}$, A. V. $x = -1$, A. H. $y = 3$,
 $C^+(f) = (-\infty; -1) \cup (-\frac{2}{3}; +\infty)$, $C^-(f) = (-1; -\frac{2}{3})$



Ejercicio 10.

- a) $f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{x}$, A. V. de f : $x = 2$, A. H. de f : $y = 0$, A. V. de f^{-1} : $x = 0$, A. H. de f^{-1} : $y = 2$
- b) $f^{-1}(x) = \frac{-x-5}{x-2}$, A. V. de f : $x = -1$, A. H. de f : $y = 2$, A. V. de f^{-1} : $x = 2$, A. H. de f^{-1} : $y = -1$

Ejercicio 11.



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} c(t) = \frac{3}{100}.$$

Una interpretación posible es que el agua salada que fluye tiene una concentración de $\frac{3}{100}$ y a medida que se agregue más de esa agua, la concentración se va a ir acercando cada vez más a $\frac{3}{100}$ pero nunca va a ser igual por el agua pura que contenía el tanque al principio.

Ejercicio 12. $L(x) = \frac{36}{x}$. $\lim_{x \rightarrow 0^+} L(x) = +\infty$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} L(x) = 0$.

Ejercicio 13. En cada caso, calcular el dominio de f y dar las ecuaciones de las asíntotas verticales y horizontales a su gráfico:

- a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$, A. V.: $x = 0$, A. H.: $y = 1$
- b) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$, A. H.: $y = -\frac{2}{5}$
- c) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-3; -1\}$, A. V.: $x = -3$ y $x = -1$, A. H.: $y = 0$
- d) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-2; 1\}$, A. V.: $x = -2$, A. H.: $y = 1$
- e) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-2; 1\}$, A. V.: $x = 1$, A. H.: $y = -1$
- f) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{2\}$, A. V.: $x = 2$, A. H.: $y = 6$
- g) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$, A. V.: $x = -1$ acercándose por $x > -1$, A. H.: $y = 1$
- h) $\text{Dom}(f) = (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$, A. V.: $x = -2$ acercándose por $x < -2$ y $x = 2$ acercándose por $x > 2$

Ejercicio 14. Hallar en cada caso el dominio y todas las asíntotas de f :

- a) $\text{Dom}(f) = (0; 1) \cup (1; +\infty)$, A. V.: $x = 1$, A. H.: $y = 5$

b) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$, A. H.: $y = 2$ en $-\infty$ e $y = 0$ en $+\infty$

Ejercicio 15.

a) $a = -5$, A. H.: $y = 4$

b) $a = -4$, A. V.: $x = -1$ y $x = 5$, A. H.: $y = -4$

Ejercicio 16.

a) f está definida en x_0 , existe $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ y estos dos valores coinciden. f es continua en x_0 .

b) f está definida en x_0 , existe $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ pero estos dos valores no coinciden. f no es continua en x_0 .

c) f no está definida en x_0 , existe $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. f no es continua en x_0 .

d) f está definida en x_0 , no existe $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ (los dos límites laterales no dan lo mismo). f no es continua en x_0 .

e) f no está definida en x_0 , no existe $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. f no es continua en x_0 .

f) f está definida en x_0 , no existe $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. f no es continua en x_0 .

g) f está definida en x_0 , no existe $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. f no es continua en x_0 .

h) f está definida en x_0 , no existe $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ (da ∞). f no es continua en x_0 .

Ejercicio 17.

a) f es continua en $x_0 = 3$

b) f es continua en $x_0 = \frac{\pi}{2}$

c) f es continua en $x_0 = 2$

d) f es continua en $x_0 = 2$

e) f no es continua en $x_0 = 1$

f) f no es continua en $x_0 = 5$

g) f no es continua en $x_0 = \frac{\pi}{2}$

h) f es continua en $x_0 = 2$

i) f es continua en $x_0 = 1$

j) f es continua en $x_0 = 3$

$$b) C^0(f) = \{0; \frac{3}{2}\}, C^+(f) = \mathbb{R} - \{0; \frac{3}{2}\}, \text{ y } C^-(f) = \emptyset$$

$$c) C^0(f) = \{-2; -1; 1\}, C^+(f) = (-2; -1) \cup (1; +\infty) \text{ y } C^-(f) = (-\infty; -2) \cup (-1; 1)$$

$$d) C^0(f) = \{-2; -\frac{3}{2}; -1; 0; \frac{3}{2}\}, C^+(f) = (-2; -\frac{3}{2}) \cup (-1; 0) \cup (\frac{3}{2}; +\infty) \text{ y}$$

$$C^-(f) = (-\infty; -2) \cup (-\frac{3}{2}; -1) \cup (0; \frac{3}{2})$$

Ejercicio 23.

$$a) \text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-3\}, C^0(f) = \{-\frac{7}{3}\}, C^+(f) = (-\infty; -3) \cup (-\frac{7}{3}; +\infty) \text{ y}$$

$$C^-(f) = (-3; -\frac{7}{3})$$

$$b) \text{Dom}(f) = \mathbb{R}, C^0(f) = \{-\frac{19}{5}; 3\}, C^+(f) = (-\infty; -\frac{19}{5}) \cup (3; +\infty) \text{ y } C^-(f) = (-\frac{19}{5}; 3)$$

$$c) \text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{6\}, C^0(f) = \{-2; 8\}, C^+(f) = (-2; 6) \cup (8; +\infty) \text{ y}$$

$$C^-(f) = (-\infty; -2) \cup (6; 8)$$

$$d) \text{Dom}(f) = (3; 4) \cup (4; +\infty), C^0(f) = \{16\}, C^+(f) = (4; 16) \text{ y}$$

$$C^-(f) = (3; 4) \cup (16; +\infty)$$

$$e) \text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}, C^0(f) = \{2\}, C^+(f) = (2; +\infty) \text{ y } C^-(f) = (-\infty; 0) \cup (0; 2)$$

$$f) \text{Dom}(f) = (-\infty; -3) \cup (-\frac{7}{3}; +\infty), C^0(f) = \{-2\}, C^+(f) = (-\infty; -3) \cup (-2; +\infty) \text{ y}$$

$$C^-(f) = (-\frac{7}{3}; -2)$$

Ejercicio 24.

$$a) A = (-\infty; -2) \cup (2; 5)$$

$$b) A = (-\infty; -1] \cup [7; +\infty)$$

$$c) A = (-\infty; -4) \cup [-1; +\infty)$$

$$d) A = (-\infty; -2) \cup [0; 1] \cup (2; +\infty)$$

$$e) A = (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$$

$$f) A = (-\frac{3}{2}\pi; -\pi) \cup (-\frac{\pi}{2}; 0) \cup (\frac{\pi}{2}; \pi) \cup (\frac{3}{2}\pi; 2\pi)$$

Ejercicio 25.

- a) f es continua en todo \mathbb{R} , $f(1) = -5$ y $f(2) = 2$. Como tienen distinto signo, por el Teorema de Bolzano, f tiene un cero en el intervalo $(1;2)$.
- b) f es continua en todo \mathbb{R} , $f(1,7) = -0,387$ y $f(1,8) = 0,632$. Como tienen distinto signo, por el Teorema de Bolzano, f tiene un cero en el intervalo $(1,7;1,8)$.
- c) f es continua en todo \mathbb{R} , $f(1,73) = -0,092283$ y $f(1,74) = 0,008024$. Como tienen distinto signo, por el Teorema de Bolzano, f tiene un cero en el intervalo $(1,73;1,74)$.

Ejercicio 26.

a) 2,25

b) 9,625