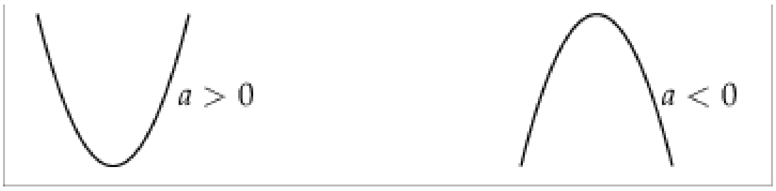
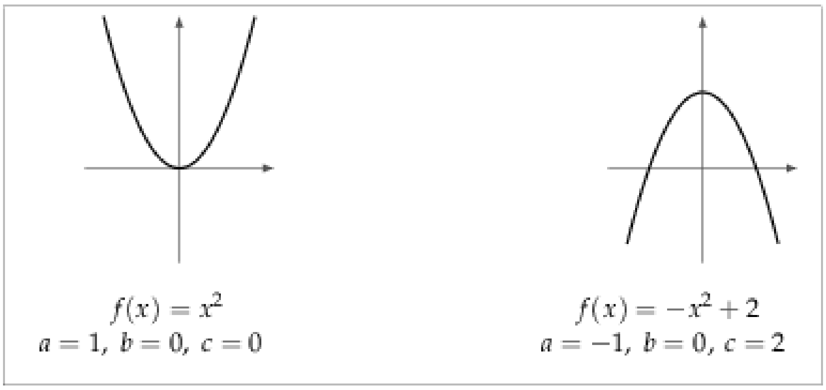
Funciones cuadráticas

Llamamos *funciones cuadráticas* a las de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$, y $a \neq 0$. Sus gráficos son *parábolas*. Dependiendo del signo de a, tendremos parábolas de la forma



Por ejemplo,



Las parábolas tienen un vértice y un eje de simetría.

Las coordenadas del vértice $V = (x_v, y_v)$ de la parábola se pueden calcular como $x_v = -\dfrac{b}{2a}$, $y_v = f(x_v)$ y el eje de simetría de la parábola correspondiente al gráfico de f es la recta vertical dada por la ecuación $x = x_v$.

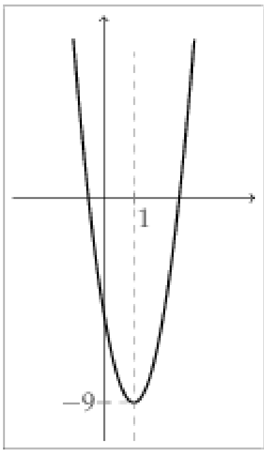
Por ejemplo, consideremos la función cuadrática

$$f(x) = 4x^2 - 8x - 5.$$

En este caso, $a = 4$, $b = -8$ y $c = -5$. Las coordenadas del vértice de su gráfico se calculan como

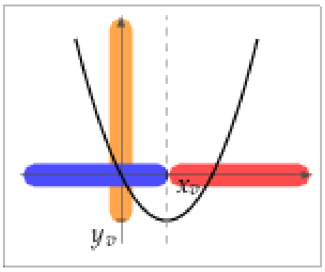
$$x_v = -\frac{-8}{2.4} = 1, \quad y_v = f(x_v) = f(1) = 4.1^2 - 8.1 - 5 = -9.$$

Por lo tanto el vértice es $V = (1, -9)$ y el eje de simetría del gráfico es $x = 1$.

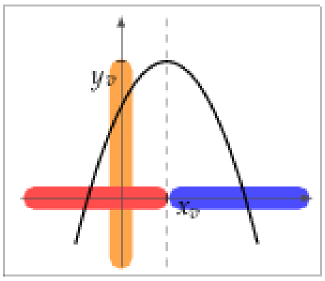


Las coordenadas (x_v, y_v) del vértice y el signo de a también nos permiten determinar otras características de f:

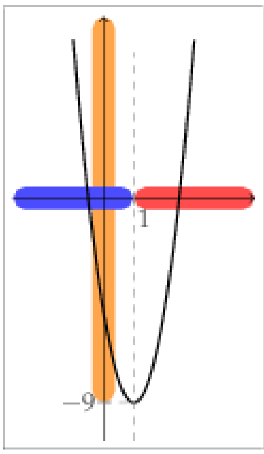
- Si $a > 0$, la función es decreciente en $(-\infty; x_v)$, es creciente en $(x_v; +\infty)$, alcanza un mínimo en $x = x_v$ y su imagen es $\text{Im}f = [y_v; +\infty)$.



- Si $a < 0$, la función es creciente en $(-\infty; x_v)$, es decreciente en $(x_v; +\infty)$, alcanza un máximo en $x = x_v$ y su imagen es $\text{Im}f = (-\infty; y_v]$.



En el ejemplo anterior, como $f(x) = 4x^2 - 8x - 5$, el vértice es $V = (1, -9)$ y $a = 4 > 0$, deducimos que la función es decreciente en $(-\infty; 1)$, es creciente en $(1; +\infty)$, alcanza un mínimo en $x = 1$ y su imagen es $\text{Im}f = [-9; +\infty)$.

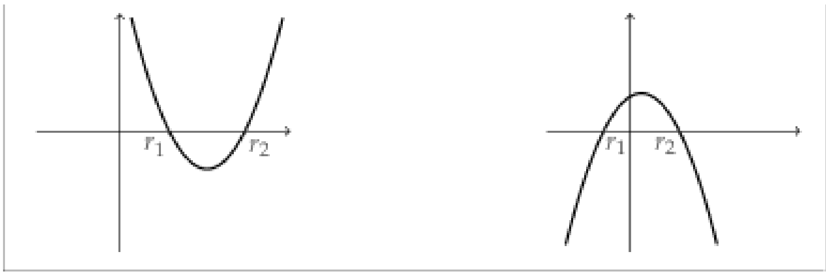


Ceros de una función cuadrática

Los ceros (o raíces) de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ se pueden obtener mediante la fórmula

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Si $b^2 - 4ac > 0$, la función tiene dos raíces reales distintas. Si las llamamos r_1 y r_2, su gráfico podría ser

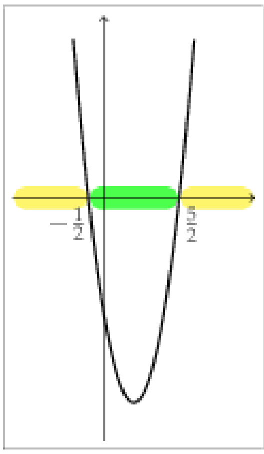


Si $a > 0$, el conjunto de positividad de f es $C^+ = (-\infty; r_1) \cup (r_2; +\infty)$ y el conjunto de negatividad de f es $C^- = (r_1; r_2)$. Y, al revés, si $a < 0$ el conjunto de positividad de f es $C^+ = (r_1; r_2)$ y el de negatividad es $C^- = (-\infty; r_1) \cup (r_2; +\infty)$.

De nuevo en el ejemplo $f(x) = 4x^2 - 8x - 5$, las raíces de f se obtienen calculando

$$\frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4.4.(-5)}}{2.4} = \frac{8 \pm 12}{8}.$$

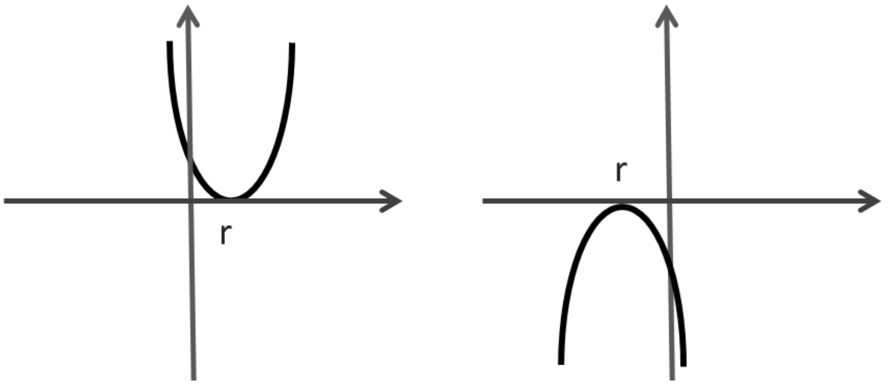
Es decir, $r_1 = -\frac{1}{2}$ y $r_2 = \frac{5}{2}$. Como $a = 4 > 0$, tenemos $C^+ = (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (\frac{5}{2}; +\infty)$ y $C^- = (-\frac{1}{2}; \frac{5}{2})$.



- Si , entonces la función tiene un único cero r, y su gráfico sería de alguna de estas formas:

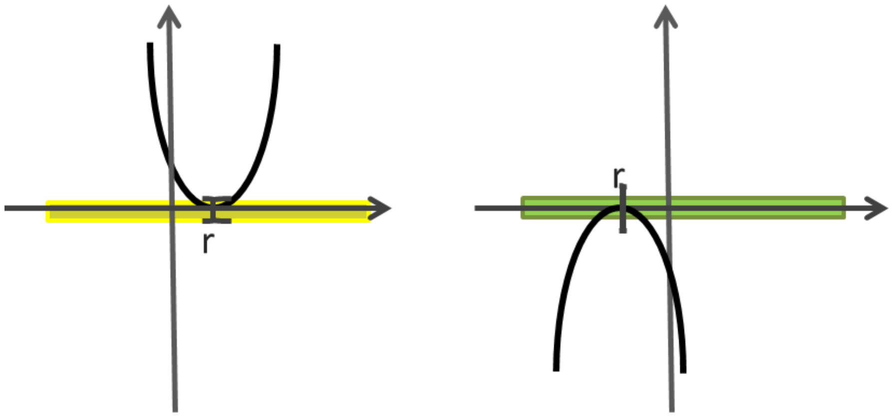
4/5/2016

Funciones cuadráticas

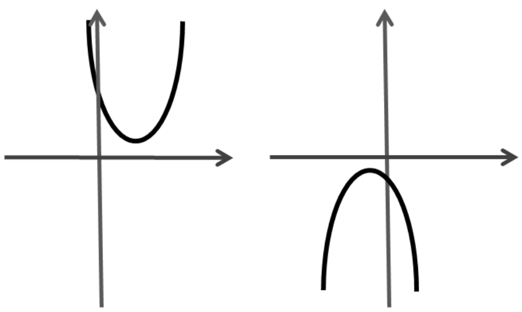


En este caso, tendremos como conjunto de positividad a $C^+ = (-\infty; r) \cup (r;+ -\infty)$ y como conjunto de negatividad al conjunto vacío (C^- = Ǿ) , si a>0.

Y en el caso que a<0 es al revés C^+ = Ǿ) y $C^- = (-\infty; r) \cup (r;+ -\infty)$



Si, la función no tendrá raíces (reales) porque no se puede calcular la raíz cuadrada de un número negativo. Su gráfico podría ser



En este caso, la función es siempre positiva si a>0 o siempre negativa si a<0.

Notemos que si r_1 y r_2 son las raíces reales de la función cuadrática f, entonces la abscisa del vértice también se puede obtener como el promedio.

$$\mathbf{r_V = \tfrac{1}{2} \quad (r_1+r_2)}$$

Cualquier función cuadrática se puede escribir de estas dos formas:

Forma polinómica: **$y(x) = a\,x^2 + b\,x + c$**

- **a**
  - factor de forma si $0<|a|<1$ se ensancha y si $|a|>1$ se angosta.
  - si $a>0$ es cóncava hacia arriba y el vértice es un mínimo
  - si $a<0$ es convexa hacia abajo y el vértice es un máximo.
- **b**
  - coordenadas del vértice $[\,-b/(2a)\ ;\ -(b^2-4ac)/4a\,]$
- **c**
  - punto de corte con el eje y $(0,c)$

Forma canónica: **$y(x) = a\,(x-h)^2 + v$**

- **a :** factor de forma
  - ✓ si $0<|a<1$ se ensancha y si $|a|>1$ se angosta.
  - ✓ si $a>0$ es cóncava hacia arriba y el vértice es un mínimo
  - ✓ si $a<0$ es convexa hacia abajo y el vértice es un máximo.
- **h**: abscisa del vértice de la parábola
- **v:** ordenada de vértice de la parábola

Forma factorizada: **$y(x)= a(x-x_1)\,(x-x_2)$**

- **a :** factor de forma
- **x_1 y x_2** raíces

http://www.recorridos.mate.cbc.uba.ar/mod/wiki/prettyview.php?pageid=48