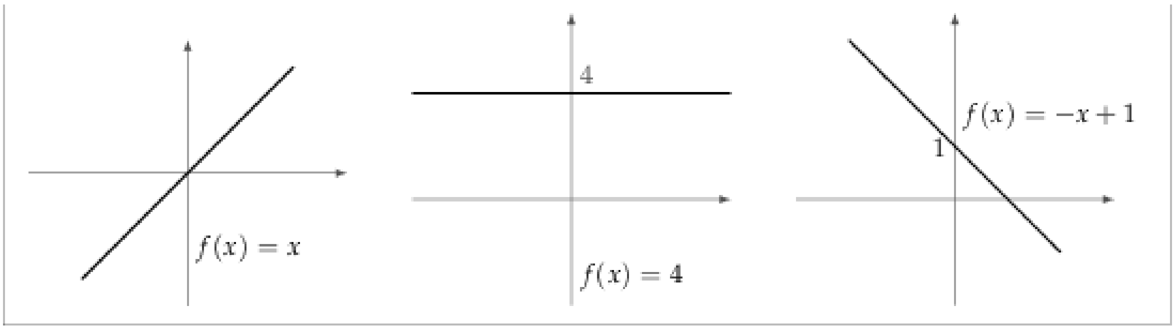
Funciones lineales

Una *función lineal* es una función cuyo gráfico es una recta. Por ejemplo, $f(x) = x$, $f(x) = 4$, $f(x) = -x + 1$ son funciones lineales:



En general, una función lineal tiene una expresión de la forma

$$f(x) = mx + b$$

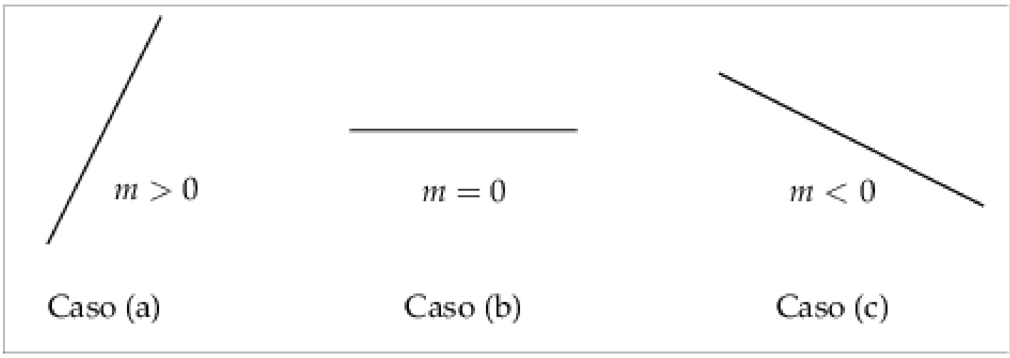
donde m y b son números reales fijos. El gráfico de esta función es la recta de ecuación

$$y = mx + b.$$

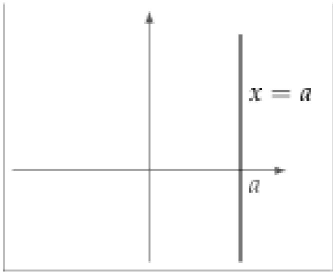
Al número m se lo llama la *pendiente* de la recta y a b, la *ordenada al origen* (b es el valor en el que la recta corta al eje y). Por ejemplo, la función $f(x) = 2x - 3$ tiene como gráfico una recta de pendiente $m = 2$ y ordenada al origen $b = -3$.

Observamos que la pendiente de una recta determina su inclinación. Esencialmente tenemos tres situaciones distintas:

(a) Si $m > 0$, la función $f(x) = mx + b$ es creciente y su gráfico es una recta como en la figura.
(b) Si $m = 0$, la función $f(x) = mx + b$ es constante ($f(x) = b$ para todo x) y su gráfico es una recta horizontal como en la figura.
(c) Si $m < 0$, la función $f(x) = mx + b$ es decreciente y su gráfico es una recta como en la figura.



Observación. Hay otro tipo de rectas en el plano que *no* son gráficos de funciones: las rectas verticales. Estas rectas tienen una ecuación del tipo $x = a$ para un número real a fijo. La recta de ecuación $x = a$ está formada por todos los puntos del plano cuya primera coordenada es a (y que tienen como segunda coordenada a cualquier número real).



Función lineal conociendo dos puntos de su gráfico

El hecho que *por dos puntos dados del plano pasa una única recta* nos dice que para determinar la expresión de una función lineal basta con conocer el valor de la función en dos valores distintos de x. Veamos, en un ejemplo, cómo puede hacerse esto:

Ejemplo. Hallar la función lineal f que cumple $f(7) = 11$ y $f(4) = 5$.

Como f es una función lineal sabemos que $f(x)$ tiene una expresión de la forma

$$f(x) = mx + b,$$

donde m y b son números reales fijos. Veamos cómo determinar los valores de m y b a partir de los datos.

Sabemos que $f(7) = 11$ y, reemplazando $x = 7$ en la ecuación de f obtenemos que

$$f(7) = m.7 + b,$$

En consecuencia, debe ser

$$7m + b = 11$$

De la misma manera, como $f(4) = 5$ y al reemplazar $x = 4$ en la ecuación de f se obtiene que

$$f(4) = m.4 + b,$$

resulta que

$$4m + b = 5.$$

Concluimos entonces que m y b deben cumplir simultáneamente las dos ecuaciones:

$$\begin{cases} 7m + b = 11 \\ 4m + b = 5 \end{cases}$$

Para resolver este sistema de dos ecuaciones podemos, por ejemplo, restar la primera ecuación menos la segunda. Obtenemos así el valor de m:

$$\begin{aligned} (7m + b) - (4m + b) &= 11 - 5 \\ (7 - 4)m &= 11 - 5 \\ m &= \frac{11 - 5}{7 - 4} \\ m &= 2. \end{aligned}$$

Finalmente, para obtener el valor de b, reemplazamos el valor de m hallado en cualquiera de las dos ecuaciones originales y despejamos:

$$7m + b = 11 \iff 7.2 + b = 11 \iff b = 11 - 14 \iff b = -3.$$

Reemplazando los valores hallados, $m = 2$ y $b = -3$, en la expresión de $f(x)$, obtenemos que

$$\boxed{f(x) = 2x - 3}$$

En general, si f es una función lineal tal que $f(x_1) = y_1$ y $f(x_2) = y_2$, con $x_1 \neq x_2$, el gráfico de f es la recta que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2).