

Tema B3

Problema 1: Durante un viaje en tren que se mueve en línea recta entre dos estaciones, la computadora de abordo registra los siguientes datos: primero el tren acelera de modo constante desde el reposo hasta alcanzar los 54 km/h en 10 segundos; luego viaja durante 40 segundos a velocidad constante y finalmente frena de modo constante durante 10 segundos hasta detenerse.

- Calcule la distancia que separa las dos estaciones.
- Calcule la velocidad media del tren en todo el trayecto (en km/h).
- Grafique la posición del tren en función del tiempo durante todo el trayecto descripto.

Solución:

El tren realiza tres etapas:

Parte del reposo y alcanza 15 m/s en 10 s. La aceleración es:

$$a_1 = \frac{(15 - 0)(m/s)}{10s} = 1,5 \text{ m/s}^2.$$

Aplicamos directamente:

$$\Delta x_1 = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$\Delta x_1 = 0 + \frac{1}{2} (1,5) (10)^2 \text{ m} = \boxed{75 \text{ m}}.$$

Segunda etapa: velocidad constante

$$\Delta x_2 = vt$$

$$\Delta x_2 = (15 \text{ m/s})(40 \text{ s}) = \boxed{600 \text{ m}}.$$

Tercera etapa:

La velocidad inicial es 15 m/s, la final es 0, y tarda 10 s.

$$a_3 = \frac{0 - 15}{10} \text{ m/s}^2 = -1,5 \text{ m/s}^2.$$

Entonces:

$$\Delta x_3 = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$\Delta x_3 = (15 \text{ m/s})(10 \text{ s}) + \frac{1}{2} (-1,5 \text{ m/s}^2)(10 \text{ s})^2$$

$$\Delta x_3 = (150 - 75) \text{ m} = \boxed{75 \text{ m}}.$$

Por lo tanto, la distancia total es:

$$d = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3$$

$$d = (75 + 600 + 75) \text{ m}$$

$$\boxed{d = 750 \text{ m}}.$$

b) Velocidad media en todo el trayecto

El tiempo total es

$$\Delta t_{\text{total}} = 10\text{s} + 40\text{s} + 10\text{s} = 60\text{s}.$$

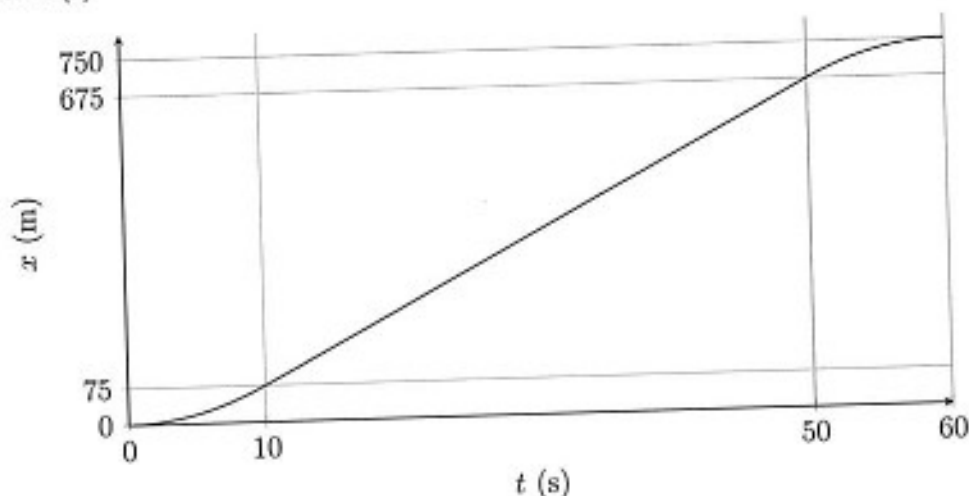
Entonces

$$v_{\text{med}} = \frac{\Delta x_{\text{total}}}{\Delta t_{\text{total}}} = \frac{750}{60} \text{ m/s.} = 12,5 \text{ m/s.}$$

En km/h:

$$v_{\text{med}} = 12,5(3,6) \text{ km/h} = \boxed{45 \text{ km/h}}.$$

c) Gráfico $x(t)$



Problema 2: Dos piedras se lanzan simultáneamente en dirección vertical, desde distintos puntos de un edificio. La piedra A se lanza desde el suelo hacia arriba con una rapidez inicial de 10 m/s. La piedra B se lanza desde la terraza del edificio y su velocidad en función del tiempo está dada por el siguiente gráfico:

- ¿En qué instante y a qué altura se cruzan?
- ¿Cuál es la velocidad media de la piedra A desde que parte hasta que se encuentra con la piedra B?
- ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por la piedra A?

Solución:

La piedra A se lanza desde el suelo hacia arriba con

$$v_{A0} = 10 \text{ m/s.}$$

Por lo tanto, tomando hacia arriba como positivo (eje y),

$$v_A(t) = 10(\text{m/s}) - 10(\text{m/s}^2)t$$

y, como $y_A(0) = 0$,

$$\boxed{y_A(t) = 10(\text{m/s})t - 5(\text{m/s}^2)t^2}.$$

Del gráfico de la piedra B se observa

$$v_B(0) = -10 \text{ m/s}, \quad v_B(2) = -30 \text{ m/s}.$$

La pendiente del gráfico es la aceleración:

$$a_B = \frac{-30 - (-10)}{2} = -10 \text{ m/s}^2.$$

Así,

$$v_B(t) = -10(m/s) - 10(m/s^2)t.$$

Si H es la altura de la terraza, entonces

$$y_B(0) = H.$$

$$y_B(t) = H - 10(m/s)t - 5(m/s^2)t^2.$$

a) Instante y altura de cruce

En el cruce,

$$y_A(t) = y_B(t).$$

Entonces

$$10(m/s)t - 5(m/s^2)t^2 = H - 10(m/s)t - 5(m/s^2)t^2.$$

Los términos cuadráticos se cancelan:

$$20(m/s)t = H,$$

de modo que

$$t_{\text{cruce}} = \frac{H}{20(m/s)}.$$

La altura del cruce sería (por simplicidad ponemos las unidades al final sabiendo que queda en metros).

$$y_{\text{cruce}} = 10 \frac{H}{20} - 5 \left(\frac{H}{20} \right)^2,$$

es decir,

$$y_{\text{cruce}} = \frac{H}{2} - \frac{H^2}{80}.$$

resultado en metros. **Variante 1:** Si $H = 20\text{m} \Rightarrow y_A(t) = y_B(t) \Rightarrow t = 1\text{seg}$

Variante 2: Si el tiempo de vuelo es 2 segundos, entonces la piedra B llegó al piso, quiere decir que $y_B(2s) = 0 \Rightarrow H = 40\text{m}$ y de plantear $y_A(t) = y_B(t)$ el tiempo de encuentro es $t = 2\text{seg}$, es decir tocan el piso al mismo tiempo.

b) Velocidad media:

La velocidad media de A es

$$v_{\text{med}} = \frac{y_A(t_{\text{cruce}}) - y_A(0)}{t_{\text{cruce}}}.$$

Como $y_A(0) = 0$,

$$v_{med} = \frac{10(m/s)t - 5(m/s^2)t^2}{t} = 10(m/s) - 5(m/s^2)t.$$

Usando $t = H/20$:

$$v_{med} = \left(10 - \frac{H}{4}\right) m/s.$$

Variante 1: $v_{med} = 5 m/s$

Variante 2: $v_{med} = 0$

c) Altura máxima de la piedra que sube:

$$y(t) = v_0 t - \frac{1}{2} t^2$$

dada la condición de altura máxima es $v = 0$

$0 = v_0 - gt$ reemplazando queda $t = 1$ seg, y volviendo a la ecuación para $y(t)$, la altura máxima es 5 metros.

Este resultado queda independiente de la altura desde donde fue lanzada la otra piedra.

Problema 3: Desde una cierta altura respecto del piso se lanza una piedra con una velocidad de 12 m/s y un ángulo de 37° hacia arriba con respecto a la horizontal. Simultáneamente, desde el piso y a una distancia horizontal D, se lanza verticalmente hacia arriba una botella con una velocidad de 8 m/s. Se desprecian todos los rozamientos. Sabiendo que ambos cuerpos chocan cuando la botella, en su descenso, tiene una velocidad de módulo 2 m/s, calcule:

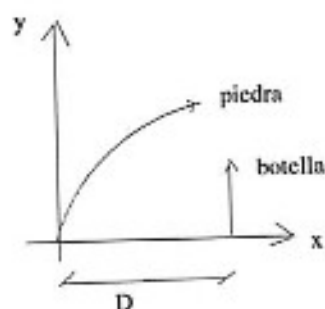
- a) La altura desde la que se lanzó la piedra.
- b) El valor de D

Solución:

La piedra se lanza desde una altura h , con

$$v_0 = 12 \text{ m/s}, \quad \theta = 37^\circ.$$

Si se toma como ejes de referencias habituales:



Sus componentes iniciales son

$$v_{0x} = 12 \cos 37^\circ = 12(0,8) = 9,6 \text{ m/s},$$

$$v_{0y} = 12 \sin 37^\circ = 12(0,6) = 7,2 \text{ m/s}.$$

La botella parte del piso verticalmente hacia arriba con

$$v_{B0} = 8 \text{ m/s}.$$

a) altura del choque

La posición vertical de la piedra es

$$y_P(t) = h + 7,2t - 5t^2.$$

Tenemos dos incógnitas h y t en el momento del choque.

Hay que determinar el instante de choque.

La botella está descendiendo y en el instante del choque tiene rapidez 2 m/s. Como está descendiendo,

$$v_B = -2 \text{ m/s}.$$

Su velocidad es (para no complicar la notación omitimos temporalmente las unidades pero no olvidar que 8 es 8m/s y 10 es 10m/s²)

$$v_B(t) = 8 - 10t.$$

Entonces

$$8 - 10t = -2,$$

de donde

$$10t = 10 \implies \boxed{t = 1 \text{ s}}.$$

La altura de la botella en ese instante es

$$y_B = 8t - 5t^2.$$

Para $t = 1$:

$$y_B = 8 - 5 = 3 \text{ m}.$$

Por lo tanto, el choque ocurre a

$$\boxed{y_{\text{choque}} = 3 \text{ m}}.$$

Conociendo el tiempo de choque, se puede calcular la altura de la piedra: (nuevamente omitimos temporalmente las unidades para que se vea mejor el cálculo sabiendo que el resultado será en metros)

$$y_P(t) = h + 7,2t - 5t^2.$$

En $t = 1$:

$$3 = h + 7,2 - 5.$$

Entonces

$$3 = h + 2,2,$$

por lo que

$$h = 0,8 \text{ m}.$$

b) Valor de D

La piedra se mueve horizontalmente con velocidad constante:

$$x_P(t) = 9,6t.$$

En $t = 1$:

$$x_P = 9,6 \text{ m}.$$

La botella permanece en la posición horizontal desde la que fue lanzada, ubicada a una distancia D . Por lo tanto,

$$D = 9,6 \text{ m}.$$

c) Altura máxima de la piedra

En realidad correspondía al problema anterior, pero en este caso también se puede resolver sin inconvenientes.

La altura adicional que alcanza la piedra desde su punto de lanzamiento es

$$\Delta h = \frac{v_{0y}^2}{2g} = \frac{(7,2)^2}{20} = \frac{51,84}{20} = 2,592 \text{ m}.$$

Sumando la altura inicial:

$$h_{\text{máx}} = 0,8 + 2,592 = 3,392 \text{ m}.$$

Por lo tanto,

$$h_{\text{máx}} = 3,392 \text{ m}.$$

Problema 4: Dos amigos navegan en canoa por un río cuya corriente tiene velocidad constante y paralela a la costa. Mientras reman río arriba (en contra de la corriente), dejan caer accidentalmente una botella al agua (se desprecia el tiempo de caída). Continúan remando río arriba durante 45 minutos y, al cabo de ese tiempo, se encuentran 3 km río arriba del punto donde cayó la botella. En ese momento advierten la pérdida, entonces dan media vuelta inmediatamente y reman río abajo con el mismo esfuerzo. Finalmente alcanzan la botella 6 km río abajo del punto donde dieron la vuelta. Suponiendo que la rapidez de la canoa respecto del agua permanece constante, calcular

a) La rapidez de la corriente del río.

b) La rapidez que tendría la canoa en agua quieta con el mismo esfuerzo de paleo.

Por una cuestión de orden definamos (por supuesto, no es necesario hacerlo en este orden, esto es a gusto personal):

v_r : rapidez de la corriente del río (respecto de la costa).

v_c : rapidez de la canoa en agua quieta (respecto del agua).

$t_1 = 45 \text{ min} = 0,75 \text{ h}$: tiempo que reman río arriba desde que cae la botella hasta que dan la vuelta.

t_2 : tiempo que tardan en alcanzar la botella desde que dan la vuelta.

Forma 1 al estilo de como lo dimos en clase:

Sistema de referencia 1D fijo a la costa (río arriba x negativo):

Ecuaciones de movimiento (fijando $x = 0$ donde los amigos no se avivaron que se les cayó la botellita...)

Rapidez de la canoa río arriba: $v_{\text{subida}} = v_c - v_r$

Rapidez de la canoa río abajo: $v_{\text{bajada}} = v_c + v_r$

Rapidez de la botella: v_r (arrastrada por la corriente hacia río abajo)

Primer tramo (de $t = 0$ a $t_1 = 0,75$ h)

En $t_1 = 0,75$ h, la canoa avanzó 3 km río arriba:

$$(v_c - v_r) \cdot 0,75\text{h} = 3\text{km} \Rightarrow v_c - v_r = 4\text{km/h} \quad \text{--- (Ecuación 1)}$$

En ese mismo tiempo, la botella flotó río abajo hasta la posición (error mas probable es olvidarse este detalle):

$$x_{\text{botella}}(t_1) = v_r \cdot 0,75\text{h}$$

Segundo tramo (desde que dan la vuelta)

Sea t_2 el tiempo que tardan en regresar desde que dan la vuelta hasta alcanzar la botellita.

Posición de la canoa al encontrar la botellita:

Salieron de $x = -3$ km y navegaron 6 km río abajo:

$$x_{\text{canoa}} = -3 \text{ km} + (v_c + v_r) \cdot t_2 = 3 \text{ km}$$

$$(v_c + v_r) \cdot t_2 = 6\text{km} \quad \text{--- (Ecuación 2)}$$

La botella siguió flotando río abajo durante el tiempo t_2 desde su posición en t_1 :

$$x_{\text{botella}} = -v_r \cdot 0,75\text{h} - v_r \cdot t_2 = -v_r(0,75\text{h} + t_2)$$

Igualando la posición de la canoa y la botella al momento del encuentro (en $x = -3$ km):

$$-v_r(0,75\text{h} + t_2) = -3\text{km} \Rightarrow v_r(0,75\text{h} + t_2) = 3\text{km} \Rightarrow t_2 = \frac{3\text{km}}{v_r} - 0,75\text{h} \quad \text{--- (Ecuación 3)}$$

Ahora queda un sistema de ecuaciones

De la Ecuación 1, expresamos v_c en función de v_r :

$$v_c = 4\text{km/h} + v_r$$

Sustituimos v_c y t_2 en la Ecuación 2:

$$(4\text{km/h} + v_r + v_r) \cdot \left(\frac{3\text{km}}{v_r} - 0,75\text{h}\right) = 6\text{km} \Rightarrow (4\text{km/h} + 2v_r) \cdot \left(\frac{3\text{km}}{v_r} - 0,75\text{h}\right) = 6\text{km}$$

Sacamos de común denominador v_r y lo pasamos multiplicando a la derecha:

$$(4\text{km/h} + 2v_r) \cdot (3\text{km} - 0,75hv_r) = v_r \cdot 6\text{km}$$

Hacemos distributiva:

$$12\text{km}^2/\text{h} + 6\text{km}v_r - 3\text{km}v_r - 1,5hv_r^2 = v_r \cdot 6\text{km}$$

$$12\text{km}^2/\text{h} - 3\text{km}v_r - 1,5hv_r^2 = 0$$

Reacomodamos:

$$1,5hv_r^2 + 3\text{km}v_r - 12\text{km}^2/\text{h} = 0$$

$$v_r^2 + 2(\text{km}/\text{h})v_r - 8\text{km}^2/\text{h}^2 = 0$$

La cuadrática dos soluciones, nos quedamos con la positiva porque va río abajo:

a) $v_r = 2\text{km}/\text{h}$

b) Reemplazamos en $v_c = 4\text{km}/\text{h} + v_r = 6\text{km}/\text{h}$

Forma 2: Esta requiere detenerse a pensar un poquito mas pero la cuenta queda mas directa.

Desde el sistema de referencia en el agua... el agua está en reposo.

La botella queda "quieta" en el lugar que cayó. Definimos x negativo río arriba y x positivo río abajo.

La canoa se aleja con una velocidad v_c durante $t_1 = 45$ min.

Los amigos al pegar la vuelta, regresan con una misma rapidez v_c respecto del agua. (El enunciado decía mismo esfuerzo).

Dado que la rapidez de ida y de vuelta respecto del agua es la misma (v_c), el tiempo que tardan en regresar hasta la botella debe ser igual al tiempo que se alejaron.

O sea, el tiempo total transcurrido desde que cayó la botella hasta que la alcanzan es 90 minutos o:

$$t_{\text{total}} = 1,5 \text{ h}$$

a) Rapidez de la corriente del río (v_r)

Respecto de la costa, la botella es simplemente arrastrada por la corriente a rapidez v_r .

La canoa dio la vuelta a 3 km del punto de caída (río arriba).

La alcanza 6 km río abajo del punto de vuelta, es decir, en la posición:

$$x_{\text{encuentro}} = -3 \text{ km} + 6 \text{ km} = 3 \text{ km}$$

Por lo tanto, la botella fue arrastrada 3 km río abajo en el tiempo total de 1,5 h.

$$v_r = \frac{\Delta x_{\text{botella}}}{t_{\text{total}}} = \frac{3 \text{ km}}{1,5 \text{ h}} = 2 \text{ km/h}$$

b) Rapidez de la canoa en agua quieta (v_c)

Durante el primer tramo de $t_1 = 0,75$ h, la canoa avanzó 3 km río arriba respecto de la costa.

Su rapidez respecto de la costa río arriba es ($v_c - v_r$):

$$(v_c - v_r) \cdot t_1 = 3 \text{ km}$$

Sustituyendo $v_r = 2$ km/h y $t_1 = 0,75$ h:

$$(v_c - 2) \cdot 0,75 = 3$$

$$v_c - 2 = \frac{3}{0,75} = 4$$

$$v_c = 4 + 2 = 6 \text{ km/h}$$