

Un vector es un segmento orientado.



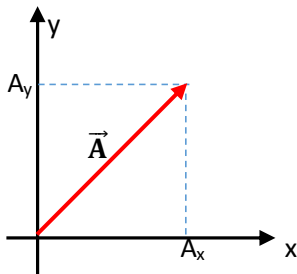
Tiene:

- módulo o intensidad: $|\vec{A}|$ (es la longitud del vector, es un número positivo. (En Álgebra lo llamarán norma 2))
- dirección (la de la recta a la que pertenece)
- sentido (indicado por la punta de flecha)
- punto de aplicación (a veces, hay vectores libres que no tienen punto de aplicación)

Componentes escalares de un vector (en el plano)

I) En coordenadas cartesianas:

Las componentes escalares de un vector, en coordenadas cartesianas, son las proyecciones del vector sobre los ejes cartesianos.



En el extremo de $\vec{A}$, trazamos una paralela al eje y, su intersección con el eje x es A_x .
En el extremo de $\vec{A}$, trazamos una paralela al eje x, su intersección con el eje y es A_y .

A_x y A_y son las componentes escalares (son números y tienen signo) del vector $\vec{A}$.
El signo de A_x y A_y indica para dónde apunta el vector.

Escribimos $\vec{A}$ en función de sus coordenadas cartesianas: $\vec{A} = (A_x; A_y)$

II) En coordenadas polares:

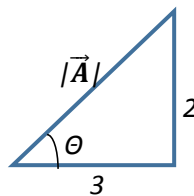
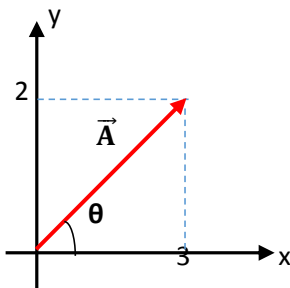
Las componentes polares de un vector son: el módulo del vector ($|\vec{A}|$) y el ángulo (θ) que forma con el semieje positivo de las x, medido en sentido antihorario.

Un vector se puede expresar en función de sus coordenadas cartesianas o de sus coordenadas polares, y debemos poder pasar de unas a otras.

Analicemos tres ejemplos:

Ejemplo 1:

Dado el vector $\vec{A} = (3; 2)$, en coordenadas cartesianas, hallar sus coordenadas polares.



Dibujamos el triángulo rectángulo que quedó determinado, indicando la longitud de sus lados. La hipotenusa mide el $|\vec{A}|$.

Por Pitágoras, calculamos el $|\vec{A}|$:

$$|\vec{A}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

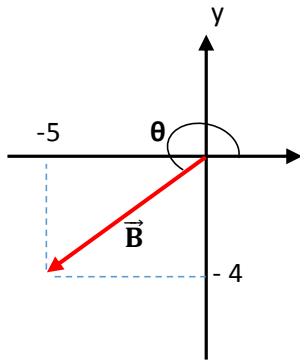
Para calcular el ángulo θ , usamos funciones trigonométricas:

$$\tan \theta = 2/3$$

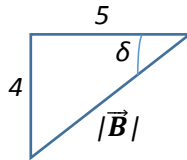
$$\theta = 33,7^\circ$$

Ejemplo 2:

Dado el vector $\vec{B} = (-5; -4)$, en coordenadas cartesianas, hallar sus coordenadas polares.



Dibujamos el triángulo rectángulo que quedó determinado, indicando la longitud de sus lados. La hipotenusa mide el $|\vec{B}|$. Llamamos δ al ángulo que forma el vector $\vec{B}$ con la horizontal. Notar que $\theta = 180^\circ + \delta$.



Por Pitágoras, calculamos el $|\vec{B}|$:

$$|\vec{B}| = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}$$

Para calcular el ángulo δ , usamos funciones trigonométricas:

$$\tan \delta = 4/5$$

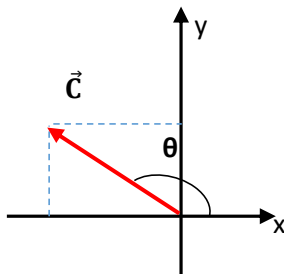
$$\delta = 38,7^\circ$$

Con lo que:

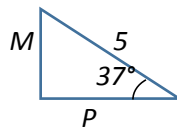
$$\theta = 180^\circ + 38,7^\circ = 218,7^\circ$$

Ejemplo 3:

Dado el vector $\vec{C}$ en coordenadas polares, $|\vec{C}| = 5$ y $\theta = 143^\circ$, escribirlo en coordenadas cartesianas.



Dibujamos el triángulo rectángulo que quedó determinado. La hipotenusa mide el $|\vec{C}| = 5$. Llamamos M y P a las longitudes de los catetos. El ángulo que forma $\vec{C}$ con la horizontal vale: $180^\circ - \theta = 37^\circ$



Usando funciones trigonométricas, calculamos M y P.

$$\sin 37^\circ = M/5$$

$$M = 3$$

$$\cos 37^\circ = P/5$$

$$P = 4$$

Entonces, prestando atención al signo de las componentes escalares:

$$\vec{C} = (-4; 3)$$

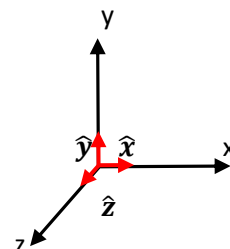
Definición de versor: es un vector de módulo 1. (Para notar un versor se usa el acento cirunflejo.)

Sirve para indicar una dirección y un sentido. Son importantes los versores $\hat{x}$, $\hat{y}$ y $\hat{z}$ asociados a los ejes cartesianos.

$$\hat{x} = (1; 0; 0)$$

$$\hat{y} = (0; 1; 0)$$

$$\hat{z} = (0; 0; 1)$$



Producto de un escalar “q” por un vector $\vec{A}$: cuando se multiplica un escalar “q” (un número) por un vector $\vec{A}$, se obtiene otro vector.

Sea $\vec{A} = (A_x; A_y; A_z)$

Al hacer el producto $q \vec{A}$ hay que multiplicar cada componente cartesiana de $\vec{A}$ por el escalar q.

$$q \vec{A} = (q A_x; q A_y; q A_z)$$

Ejemplo 4: (en el plano)

Sea el vector $\vec{A} = (3; 2)$

a) Calcular el vector $\vec{E} = 2 \vec{A}$.

Al multiplicar cada componente escalar de $\vec{A}$ por 2 obtenemos:

$$\vec{E} = (6; 4)$$

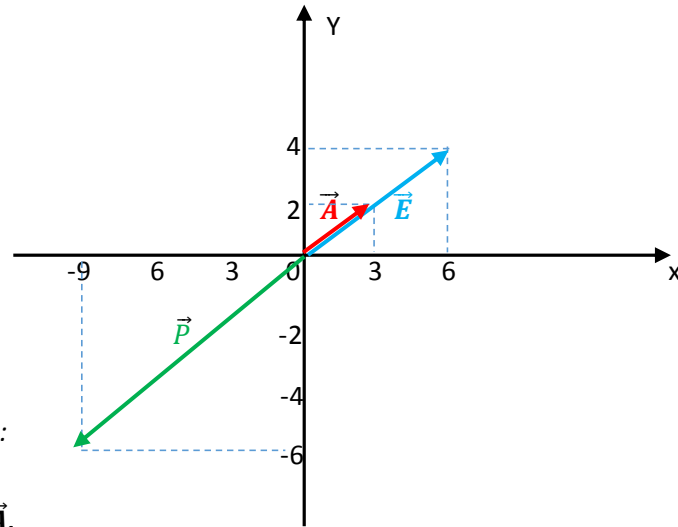
Lo graficamos en celeste y vemos que tiene igual dirección y sentido que $\vec{A}$ y su módulo es el doble.

b) Calcular el vector $\vec{P} = -3 \vec{A}$

Al multiplicar cada componente escalar de $\vec{A}$ por -3 obtenemos:

$$\vec{P} = (-9; -6)$$

Lo graficamos en verde y vemos que tiene igual dirección que $\vec{A}$, pero sentido contrario y su módulo es el triple.



Analizando estos ejemplos es fácil darse cuenta que al multiplicar un escalar por un vector $\vec{A}$, se obtiene otro vector de:

- Igual dirección que $\vec{A}$.
- Igual sentido que $\vec{A}$ si el escalar es positivo, y sentido contrario que $\vec{A}$ si el escalar es negativo.
- Módulo igual al módulo del escalar por el módulo de $\vec{A}$.

En física hay muchas magnitudes que se definen como el producto de un escalar por un vector, por ejemplo:

$$\vec{F}_{\text{Neta}} = m \vec{a}$$

Como la masa es un escalar positivo, la $\vec{F}_{\text{Neta}}$ tiene igual dirección y sentido que $\vec{a}$.

$$\vec{v}_m = \Delta \vec{r} / \Delta t \quad (\text{multiplicamos el vector desplazamiento } \Delta \vec{r} \text{ por el escalar } 1 / \Delta t)$$

Como Δt es positivo, el vector velocidad media $\vec{v}_m$ tiene igual dirección y sentido que $\Delta \vec{r}$.

$$\vec{a}_m = \Delta \vec{v} / \Delta t \quad (\text{multiplicamos el vector variación de velocidad } \Delta \vec{v} \text{ por el escalar } 1 / \Delta t)$$

Como Δt es positivo, el vector aceleración media $\vec{a}_m$ tiene igual dirección y sentido que $\Delta \vec{v}$.

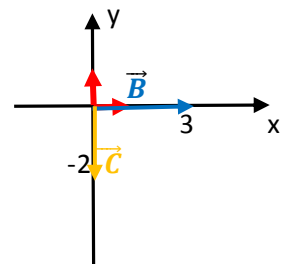
Ahora que ya sabemos multiplicar un escalar por un vector, veamos otra forma de notar los vectores que tienen la dirección de uno de los ejes cartesianos, usando versores:

El vector $\vec{B}$, que en coordenadas cartesianas lo escribíamos así:

$$\vec{B} = (3; 0),$$

ahora podemos pensarlo como el producto del escalar 3 por el versor $\hat{x}$.

$$\vec{B} = 3 \hat{x}$$



El vector $\vec{C}$, que en coordenadas cartesianas lo escribíamos así:

$$\vec{C} = (0; -2),$$

ahora podemos pensarlo como el producto del escalar -2 por el versor $\hat{y}$.

$$\vec{C} = -2 \hat{y}$$

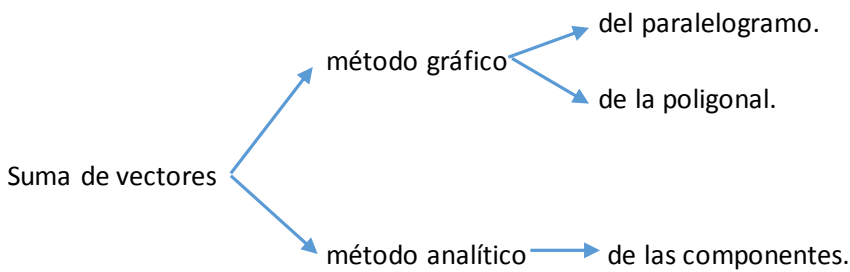
En adelante, para escribir los vectores vamos a utilizar los versores.

Los vectores paralelos al eje x los escribiremos como el producto entre la componente escalar x del vector multiplicada por el versor $\hat{x}$.

Los vectores paralelos al eje y los escribiremos como el producto entre la componente escalar y del vector multiplicada por el versor $\hat{y}$.

Suma de vectores.

Hay varios métodos para sumar vectores:

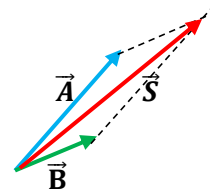


Queremos hallar el vector $\vec{S}$ tal que $\vec{S} = \vec{A} + \vec{B}$

Suma gráfica de vectores:

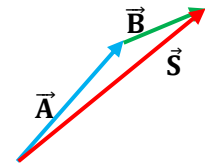
- Sumamos por el método del paralelogramo:

- 1° Dibujamos los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ con el origen común.
- 2° En el extremo de $\vec{A}$ trazamos una paralela a $\vec{B}$.
- 3° En el extremo de $\vec{B}$ trazamos una paralela a $\vec{A}$.
- 4° El vector suma $\vec{S}$ es la diagonal del paralelogramo.



- Sumamos por el método de la polygonal:

- 1° Ponemos un vector a continuación del otro.
- 2° El vector suma $\vec{S}$, tiene origen en el origen del primero y extremo en el extremo del último.



Mirando el último esquema vemos que en general: $|\vec{S}| \leq |\vec{A}| + |\vec{B}|$

(Únicamente si sumamos dos vectores paralelos y de igual sentido se cumple que el módulo del vector suma es la suma de los módulos.)



En física vamos a sumar fuerzas, velocidades, aceleraciones, etc.

Observemos que con lo visto podemos generalizar la notación de vectores en el plano, usando versores.

Sean los vectores $\vec{A}_x$ y $\vec{A}_y$ que se muestran en la figura.

Estos vectores, que son paralelos a los ejes x e y respectivamente, los podemos escribir usando versores de la manera que vimos anteriormente:

$$\vec{A}_x = A_x \hat{x}$$

$$\vec{A}_y = A_y \hat{y}$$

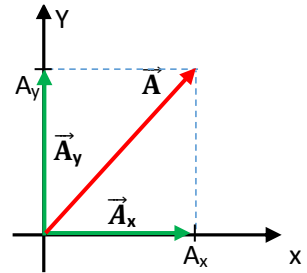
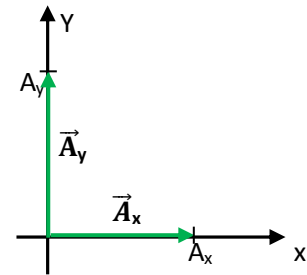
Si sumamos los vectores $\vec{A}_x$ y $\vec{A}_y$ por el método del paralelogramo y llamamos $\vec{A}$ al vector suma, tenemos:

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y$$

$$\vec{A} = A_x \hat{x} + A_y \hat{y}$$

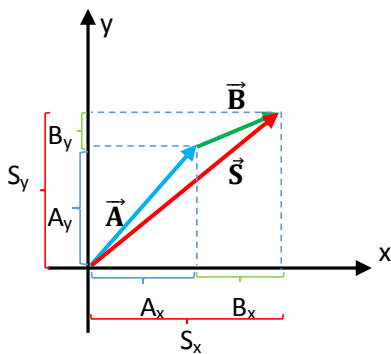
Aprendimos entonces otra manera de escribir un vector usando versores que es equivalente a la que usábamos anteriormente $\vec{A} = (A_x; A_y)$

Llamamos A_x y A_y (son números con su signo) a las componentes escalares del vector. Llamamos $\vec{A}_x$ y $\vec{A}_y$ (son vectores) a los vectores componentes del vector $\vec{A}$.



Suma analítica de vectores:

Para deducir como se suman analíticamente dos vectores, vamos a dibujar la suma gráfica por el método de la poligonal sobre los ejes cartesianos.



$$\vec{A} = A_x \hat{x} + A_y \hat{y}$$

$$\vec{B} = B_x \hat{x} + B_y \hat{y}$$

Mirando el gráfico, el vector suma se escribe:

$$\vec{S} = \underbrace{(A_x + B_x)}_{S_x} \hat{x} + \underbrace{(A_y + B_y)}_{S_y} \hat{y}$$

Vemos entonces que cuando sumamos vectores, se suman las componentes escalares x por un lado y las componentes escalares y por el otro. No se mezclan las componentes.

Hagamos un ejemplo numérico:

Dados los vectores,

$$\vec{A} = 6 \hat{x} + 8 \hat{y}$$

$$\vec{B} = -4 \hat{x} + 3 \hat{y}$$

Hallar el vector suma $\vec{S}$.

$$\vec{S} = (6 - 4) \hat{x} + (8 + 3) \hat{y}$$

$$\vec{S} = 2 \hat{x} + 11 \hat{y}$$

Resta de vectores:

Si miramos el gráfico, por el método de la poligonal, se puede decir que:

$$\vec{A} + \vec{D} = \vec{C}$$

Despejando el vector $\vec{D}$:

$$\vec{D} = \vec{C} - \vec{A}$$

Mirando el gráfico, las componentes escalares de $\vec{D}$ las podemos escribir:

$$\vec{D} = \underbrace{(C_x - A_x)}_{D_x} \hat{x} + \underbrace{(C_y - A_y)}_{D_y} \hat{y}$$

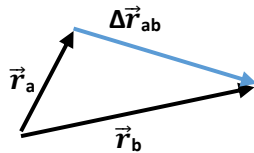
Vemos entonces que para restar vectores, se restan las componentes x por un lado y las componentes y por el otro. No se mezclan las componentes.

Observar que el vector diferencia $\vec{D}$ tiene origen en el extremo del sustraendo ($\vec{A}$) y extremo en el extremo del minuendo ($\vec{C}$).

En física vamos a restar vectores para calcular diferencias. Por ejemplo:

El vector desplazamiento lo definimos:

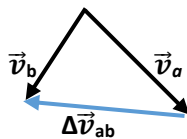
$$\Delta \vec{r}_{ab} = \vec{r}_b - \vec{r}_a$$



Observar que $\Delta \vec{r}_{ab}$ tiene origen en el extremo de $\vec{r}_a$ y extremo en el extremo de $\vec{r}_b$.

Al vector variación de velocidad lo definimos:

$$\Delta \vec{v}_{ab} = \vec{v}_b - \vec{v}_a$$



Observar que $\Delta \vec{v}_{ab}$ tiene origen en el extremo de $\vec{v}_a$ y extremo en el extremo de $\vec{v}_b$.

Cuando calculamos la diferencia o variación entre dos vectores “inicial” y “final”, el vector diferencia tiene origen en el extremo del vector “inicial” y extremo en el extremo del vector “final”.

Ejemplo:

Sean los vectores posición, en un dado sistema de referencia, en el plano:

$$\vec{r}_a = 10 \text{ m } \hat{x} + 7 \text{ m } \hat{y}$$

$$\vec{r}_b = 4 \text{ m } \hat{x} - 5 \text{ m } \hat{y}$$

El vector desplazamiento es:

$$\Delta \vec{r}_{ab} = (4 \text{ m} - 10 \text{ m}) \hat{x} + (-5 \text{ m} - 7 \text{ m}) \hat{y}$$

$$\Delta \vec{r}_{ab} = -6 \hat{x} - 12 \text{ m } \hat{y}$$

