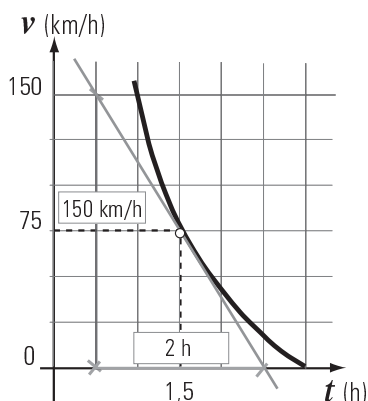




La aceleración instantánea en un instante dado es el valor de la pendiente de la recta tangente a la gráfica $v = v(t)$ en el punto considerado. En este ejemplo la aceleración instantánea en $t = 1,5$ h es la pendiente de la recta tangente gris:

$$150/2 \text{ km/h}^2 = 75 \text{ km/h}^2$$

Por supuesto, repitiendo el proceso que aplicamos para obtener la velocidad instantánea a partir de la velocidad media, definimos la aceleración instantánea como:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} a_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

En consecuencia, si conocemos la función que relaciona la velocidad con el tiempo, o sea $v(t)$, podemos obtener directamente la función derivada $a(t)$ usando las técnicas del cálculo diferencial y luego evaluar la aceleración en el instante que deseemos:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = v'(t)$$

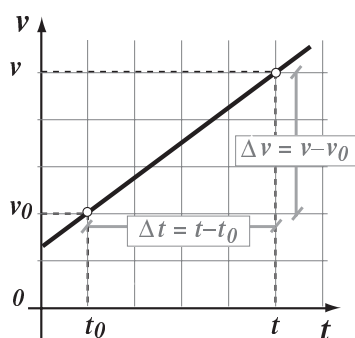
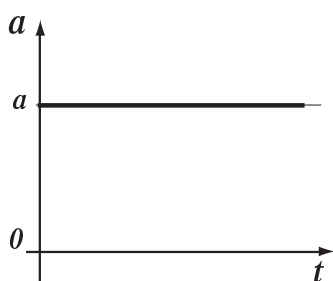
Gráficamente la aceleración instantánea en un instante dado es el valor de la pendiente de la recta tangente a la gráfica $v = v(t)$ en el punto considerado.

$$v(t) = \int a(t) dt \quad \text{entonces:}$$

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^t a(t) dt$$

De la expresión anterior se deduce que, si lo que se conoce es la función que relaciona la aceleración con el tiempo $a = a(t)$, podrá obtenerse la función $v = v(t)$ por integración, debiéndose conocer además la velocidad en un instante determinado (v_0).

Destaquemos que siendo la velocidad una magnitud vectorial también lo es la aceleración. Nuevamente, para movimientos rectilíneos podremos tratarla como un escalar siempre que recordemos que su dirección es la de la trayectoria y su sentido el mismo u opuesto al sentido positivo del eje de referencia.



Movimiento rectilíneo uniformemente variado (MRUV)

Así como hemos definido el movimiento rectilíneo uniforme como aquel que tiene velocidad constante vamos a llamar **movimiento rectilíneo uniformemente variado** (MRUV) a aquel que tiene la misma aceleración media, independientemente de cuál sea el intervalo considerado para su cálculo.

En consecuencia, la aceleración instantánea también es constante en el tiempo y la representación gráfica de la aceleración en función del tiempo es la correspondiente a la función constante, es decir, una recta de pendiente nula. ($a = a_m$)

Considerando el intervalo de tiempo entre un instante determinado t_0 y uno genérico t , despejamos la velocidad y la expresamos como una función del tiempo.

$$a = \frac{v - v_0}{t - t_0} = cte \quad \Rightarrow \quad v(t) = v_0 + a(t - t_0)$$

Esta es la **ecuación horaria de velocidad del movimiento rectilíneo uniformemente variado**. Puesto que se trata de una función lineal su representación gráfica es una recta cuya pendiente es el valor de la aceleración y que pasa por el punto de abscisa t_0 y ordenada v_0 (la velocidad del móvil en el instante t_0).

Esta ecuación nos permite calcular el valor de la velocidad v correspondiente a un valor de t cualquiera, conocida la velocidad v_0 en el instante t_0 y la aceleración a del movimiento considerado.

¿Como obtenemos a partir de la función $v = v(t)$ la ecuación horaria del movimiento $x = x(t)$?

Cuando analizamos el movimiento rectilíneo uniforme, dedujimos

que el desplazamiento efectuado en el intervalo de tiempo entre t_0 y t coincide con el área calculada en el gráfico $v = v(t)$. Esta propiedad tiene un carácter general, es decir vale independientemente de la forma del gráfico $v = v(t)$, ya que $x = x(t)$ se obtiene integrando $v = v(t)$ y conociendo una posición en un instante determinado.

Aplicándola al MRUV, podemos obtener la ecuación horaria $x = x(t)$ para este tipo de movimiento a partir de un análisis gráfico. La figura de la derecha se puede descomponer en un rectángulo de base $(t-t_0)$ y altura v_0 y un triángulo de base $(t-t_0)$ y altura $(v-v_0)$. Empleamos las fórmulas de área para rectángulos y triángulos:

$$\Delta x = v_0 \Delta t + \frac{\Delta v \Delta t}{2}$$

De la ecuación horaria de la velocidad: $\Delta v = v - v_0 = a(t - t_0)$

$$\Delta x = v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$$

Este resultado coincide con el desplazamiento $\Delta x = x - x_0$ efectuado por el móvil en el intervalo $(t - t_0)$; despejando x obtenemos la **ecuación horaria de posición del movimiento uniformemente variado**.

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$$

Esta función es cuadrática; el gráfico de posición en función del tiempo se representa mediante una parábola.

Observación: Si definimos el MRUV como aquel en el que la aceleración es constante podremos decir que:

- por ser constante la dirección del vector aceleración y , siempre que la dirección de la velocidad inicial sea paralela a la de la aceleración, la trayectoria debe ser necesariamente rectilínea.
- por ser constantes el módulo y el sentido del vector aceleración, el valor de la aceleración es siempre el mismo al transcurrir el tiempo, con lo cual resulta sencillo obtener por integración la función $v = v(t)$ y , a su vez, por integración de ésta última la función $x = x(t)$ como sigue:

$$\int_{v_0}^v dv = \int_{t_0}^t a dt$$

pero $a(t) = \text{constante} = a$; luego:

$$v - v_0 = a \int_{t_0}^t dt = a(t - t_0)$$

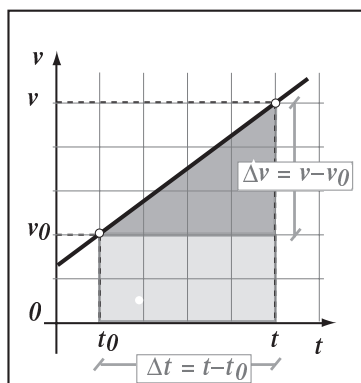
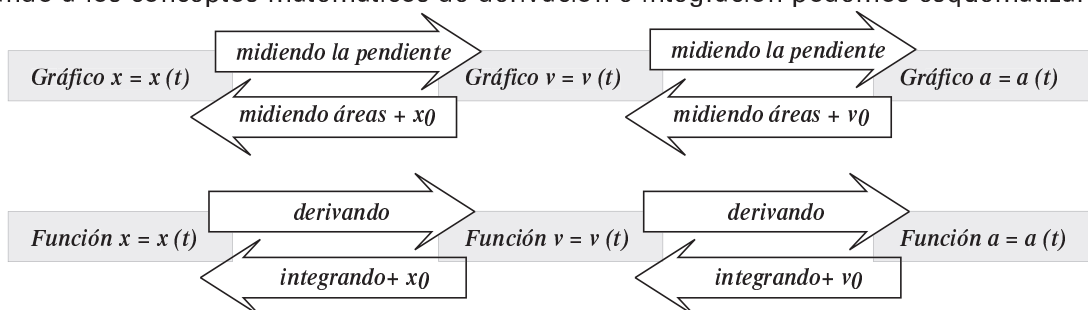
$$v = v_0 + a(t - t_0)$$

$$\int_{x_0}^x dx = \int_{t_0}^t [v_0 + a(t - t_0)] dt$$

$$x - x_0 = v_0 \int_{t_0}^t dt + a \int_{t_0}^t (t - t_0) dt$$

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$$

Apelando a los conceptos matemáticos de derivación e integración podemos esquematizar



El desplazamiento se calcula como el área encerrada entre la gráfica $v = v(t)$ y el eje de t .

Área = área rectángulo
+
área triángulo

$$\Delta x = v_0 \Delta t + \frac{1}{2} \Delta v \Delta t$$

$$\Delta x = v_0 \Delta t + \frac{1}{2} a \Delta t \Delta t$$

$$\Delta x = v_0 \Delta t + \frac{1}{2} a \Delta t^2$$

O bien el área de un trapecio:

$$\Delta x = (B + b) \frac{h}{2}$$

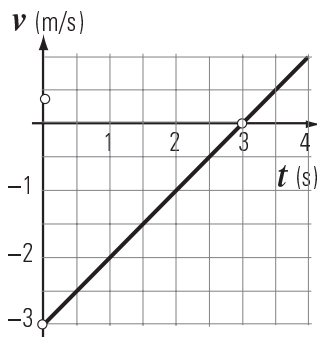
$$\Delta x = (v + v_0) \frac{\Delta t}{2}$$

$$\Delta x = [(v_0 + a \Delta t) + v_0] \frac{\Delta t}{2}$$

$$\Delta x = 2 v_0 \frac{\Delta t}{2} + \frac{1}{2} a \Delta t^2$$

$$\Delta x = v_0 \Delta t + \frac{1}{2} a \Delta t^2$$

Ejemplo



$$v(t) = -3 \frac{m}{s} + 1 \frac{m}{s^2} t$$

El gráfico de la figura representa la velocidad de una partícula que se mueve sobre el eje x . En el instante $t = 0$ la partícula se encuentra en el origen.

- Hallar la ecuación horaria de la velocidad.
- Determinar en qué intervalos de tiempo la partícula se mueve cada vez más rápido y en cuáles frena.
- Calcular el desplazamiento y la distancia recorrida entre 2 s y 4 s.
- Graficar $x = x(t)$

a) A partir del gráfico obtenemos la aceleración:

$$a = \frac{v - v_0}{t - t_0} = \frac{0 \text{ m/s} - (-3 \text{ m/s})}{3 \text{ s} - 0 \text{ s}} = 1 \text{ m/s}^2$$

y reemplazando los valores de la aceleración y velocidad inicial en la ecuación de velocidad:

$$v(t) = v_0 + a(t - t_0)$$

$$v(t) = -3 \frac{m}{s} + 1 \frac{m}{s^2} t$$

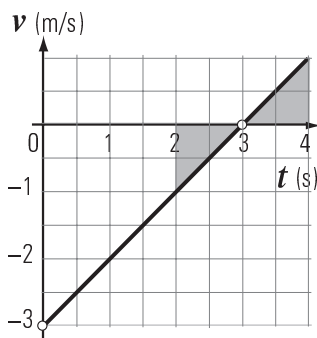
b) En el lenguaje cotidiano decimos que una partícula acelera cuando el módulo de la velocidad o rapidez se incrementa en función del tiempo y que frena cuando disminuye. En consecuencia, entre 0 s y 3 s, la partícula frena (ya que su rapidez disminuye uniformemente desde 3 m/s a 0 m/s); en cambio, a partir de 3 s, la partícula aumenta su rapidez. Observemos que la aceleración es positiva en todo instante. La distinción entre moverse cada vez más rápido y frenar no se hace en base al análisis del signo de la aceleración, sino en base a la comparación entre los signos de velocidad y aceleración. Cuando ambos signos coinciden, el cuerpo aumenta su rapidez; cuando ambos signos son opuestos, el cuerpo frena. Desde un punto de vista vectorial, en un movimiento rectilíneo, la partícula aumenta su rapidez cuando velocidad y aceleración son vectores de igual sentido y la partícula frena cuando velocidad y aceleración son vectores de sentidos opuestos.

c) Dividimos el intervalo de tiempo en dos subintervalos: de 2 s a 3 s y de 3 s a 4 s

De 2 s a 3 s: Necesitamos primero calcular la velocidad en $t = 2$ s

$$v(2s) = -3 \frac{m}{s} + 1 \frac{m}{s^2} \cdot 2s = -1 \frac{m}{s}$$

$$\Delta x = \text{Área} = \frac{(3s - 2s) \cdot \left(-1 \frac{m}{s}\right)}{2} = -0,5m$$



Observemos que el resultado tiene dos características que merecen aclaración:

- El signo negativo resultó del hecho de haber tomado con signo negativo la altura del triángulo. En general, todos los desplazamientos obtenidos a partir de este proceso de integración gráfica en casos donde la velocidad sea negativa, darán por resultado un valor negativo, imprescindible para analizar correctamente el signo del desplazamiento.
- Además nuestro resultado se expresa en unidades de longitud, por ser el producto de una cantidad de velocidad por una cantidad de tiempo.

Ambas características (signo y unidades) determinan que estamos usando el término área con ciertos recaudos, por no coincidir exactamente con la definición del término en sentido geométrico.

Distinguimos, entonces que en el intervalo de 2 s a 3 s, el móvil ha tenido un desplazamiento de $-0,5$ m (se ha movido 0,5 m en sentido contrario al sentido positivo del sistema de referencia) mientras que la longitud del camino recorrido (distancia) ha sido de 0,5 m.

De 3 s a 4 s, podemos realizar el mismo procedimiento de cálculo o directamente argumentar por razones de simetría sugeridas por la representación gráfica que tanto el desplazamiento como la longitud del camino recorrido valen 0,5 m, pues el móvil se desplaza en sentido positivo durante todo el intervalo.

Para el intervalo completo:

$$\Delta x = -0,5m + 0,5m = 0$$

Al principio y al final del intervalo el móvil está en la misma posición, mientras que la distancia recorrida vale:

$$d = 0,5m + 0,5m = 1m$$

d) Las constantes que usamos para escribir $x = x(t)$ son:

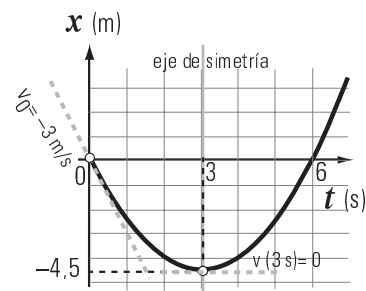
$$a = 1m/s^2; t_0 = 0s; x_0 = 0m; v_0 = -3m/s$$

La ecuación horaria es:

$$x(t) = -3\frac{m}{s}t + \frac{1}{2}1\frac{m}{s^2}t^2$$

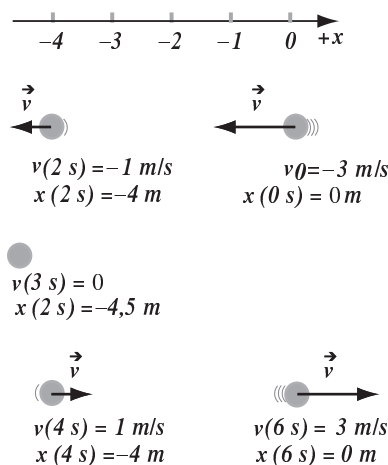
Para realizar el gráfico de la derecha (que corresponde a una parábola cuadrática) tenemos en cuenta que:

- la aceleración es positiva; luego, la parábola tiene la concavidad hacia arriba.
- la velocidad inicial es negativa; luego, la pendiente de la recta tangente al gráfico $x = x(t)$ en el instante inicial es negativa.
- A los 3 segundos la parábola tiene un mínimo. Esto se debe a que la velocidad vale cero y entonces la recta tangente es horizontal. En efecto, la ubicación del vértice de la parábola que siempre coincide con el instante en que la velocidad se anula es de gran utilidad para una representación adecuada. Una recta vertical que pasa por el vértice es un eje de simetría de la parábola.
- A los 6 segundos la posición será cero (igual que a los 0 s) y la pendiente de la recta tangente es 3 m/s (igual módulo y signo opuesto de la velocidad a los 0 s). Estas propiedades son consecuencia de la simetría de los gráficos de posición y velocidad respecto de una recta vertical trazada para el instante en que la velocidad se anula.



$$x(t) = -3\frac{m}{s}t + \frac{1}{2}1\frac{m}{s^2}t^2$$

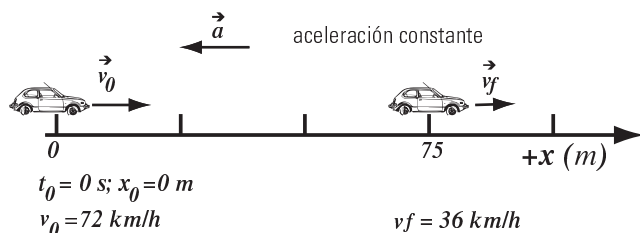
$\vec{a}$ aceleración constante
 $a = 1m/s^2$



Ejemplo

El conductor de un automóvil que marchaba a 72 km/h por una calle observa un obstáculo. Aplica los frenos hasta reducir la velocidad a 36 km/h. Durante este proceso de frenado recorre 75 m.

- Calcular la aceleración de frenado.
- Determinar el tiempo de frenado y comparar las longitudes recorridas durante el primero y el último segundo de frenado.



a) Para este cálculo, observamos que el tiempo empleado no es dato ni incógnita. Por tanto, nos conviene utilizar una fórmula que relacione desplazamiento, velocidades y aceleración del movimiento.

De la ecuación horaria de velocidad:

$$v(t) = v_0 + a(t - t_0)$$

despejamos $(t - t_0)$ y lo reemplazamos en la ecuación horaria de posición, operamos y simplificamos, obteniendo la fórmula buscada:

$$(x - x_0) = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$$

Expresión conocida como **ecuación complementaria del movimiento rectilíneo uniformemente variado**, donde x y v representan la posición y la velocidad del automóvil en un mismo instante de tiempo.

Actividad. Verifique la "ecuación complementaria".

Eligiendo el origen del sistema de referencia coincidente con la posición del automóvil cuando comienza a frenar, sentido positivo el de avance del móvil y $t_0 = 0$ s el instante correspondiente, resulta que $x_0 = 0$ m y que $v_0 = 72 \text{ km/h} = 20 \text{ m/s}$. Además el automóvil habrá recorrido 75 m en el instante en que la velocidad se haya reducido a $36 \text{ km/h} = 10 \text{ m/s}$. Por tanto, despejando la aceleración de la expresión anterior:

$$a = \frac{v^2 - v_0^2}{2(x - x_0)} = \frac{\left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 - \left(20 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2(75 \text{ m} - 0 \text{ m})} = -2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Teniendo en cuenta que el signo de la velocidad es positivo, resulta consistente el signo negativo calculado para la aceleración, pues estamos analizando un proceso de frenado (disminuye la rapidez del automóvil).

b) De la ecuación horaria de velocidad, despejamos el tiempo empleado en el proceso de frenado:

$$(t - t_0) = \frac{(v - v_0)}{a} = \frac{\left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)}{-2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 5 \text{ s}$$

Calculamos las posiciones en los distintos instantes considerados:

$$x(1 \text{ s}) = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 1 \text{ s} + \frac{1}{2} \cdot \left(-2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) \cdot (1 \text{ s})^2 = 19 \text{ m}$$

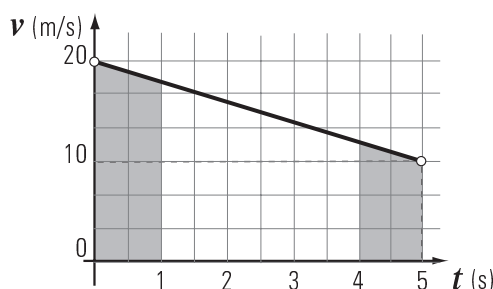
$$x(4 \text{ s}) = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 4 \text{ s} + \frac{1}{2} \cdot \left(-2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) \cdot (4 \text{ s})^2 = 64 \text{ m}$$

$$x(5 \text{ s}) = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 5 \text{ s} + \frac{1}{2} \cdot \left(-2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) \cdot (5 \text{ s})^2 = 75 \text{ m}$$

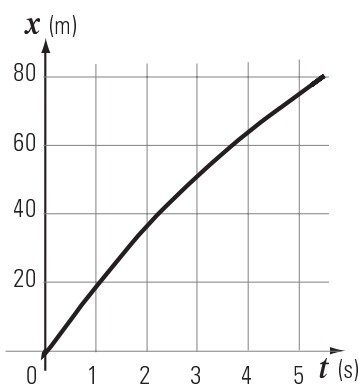
En el primer segundo la longitud recorrida vale: $19 \text{ m} - 0 \text{ m} = 19 \text{ m}$

En el último segundo la longitud recorrida vale: $75 \text{ m} - 64 \text{ m} = 11 \text{ m}$

Por tanto, la longitud recorrida por el automóvil resulta mayor en el primer segundo que en el último. A esta conclusión, podríamos haber llegado a través de un análisis cualitativo. Es decir, resulta evidente que durante cualquier instante del primer segundo las velocidades instantáneas del automóvil son mayores que durante cualquier instante del último segundo. También de la observación del gráfico de velocidad en función del tiempo y recordando que los desplazamientos pueden calcularse a través de la evaluación de las áreas, resulta claro que el área involucrada en el primer segundo es mayor que el área involucrada en el último segundo.



Actividad. Teniendo en cuenta que el automóvil redujo su velocidad a la mitad en cinco minutos y considerando que continúa frenando con igual aceleración, ¿tardará otro tanto en detenerse?, ¿recorrerá otros setenta y cinco metros? Justifique, en primer lugar, sin hacer cuentas. Luego calcule el instante y la posición en que se detiene.



$$x(t) = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \left(-2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) \cdot (t)^2$$

Ejemplo

En el manual de educación vial de la dirección de tránsito de la provincia de Neuquén se presenta el cuadro de la derecha donde aparecen tabuladas las distancias de detención, expresadas en metros, correspondientes a distintos valores de velocidad. Realizaremos un estudio cinemático de esta información que apunta a concienciar al conductor para prevenir accidentes.

a) El tiempo de reacción no es igual en todas las personas, ni es igual siempre en la misma persona (pues depende de las circunstancias como la precaución, la fatiga, el consumo de bebidas alcohólicas, etc.) ¿Cuál es el tiempo de reacción considerado en este cuadro?

b) Justificaremos que la distancia de frenado es proporcional al cuadrado de la velocidad. Así, si para una velocidad inicial de 40 km/h el móvil se detiene en 10 metros, con una velocidad inicial de 80 km/h, el doble que la anterior, no se detendrá en 20 metros, sino en 40 metros (cuatro veces más).

¿Cuál sería la distancia de frenado si la velocidad de circulación fuera de 160 km/h?

c) En realidad es muy difícil establecer cifras exactas sobre la distancia de detención ya que depende no sólo de la velocidad a que circulamos y del tiempo de reacción y pericia del conductor sino también de las condiciones meteorológicas y tipo de pavimento, del estado de los frenos, de la adherencia de los neumáticos, de la configuración de la calzada, etc. Calcularemos la aceleración de frenado implícita en la columna (2) de esta tabla.

a) Durante el tiempo de reacción el vehículo mantiene constante su velocidad; calculamos el intervalo de tiempo considerando cualquiera de las velocidades presentadas y su correspondiente desplazamiento.

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta x}{v} = \frac{8m}{40 \frac{km}{h}} = \frac{8m}{40 \cdot \frac{1000m}{3600s}} = 0,72s$$

b) Suponemos que el automóvil frena con aceleración constante y utilizamos la ecuación complementaria:

$$\Delta x = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} = \frac{0 - v_0^2}{2a} = -\frac{v_0^2}{2a}$$

El signo negativo corresponde al hecho de que la aceleración es de signo contrario al desplazamiento.

¿Cuáles es la relación entre Δx_1 y Δx_2 si $v_{02} = 2 \cdot v_{01}$?

$$(v_{01} = 40 \text{ km/h}; v_{02} = 80 \text{ km/h})$$

$$\Delta x_2 = -\frac{(v_{02})^2}{2a} = -\frac{(2 \cdot v_{01})^2}{2a} = 4 \cdot \left[-\frac{(v_{01})^2}{2a} \right] = 4 \cdot \Delta x_1 = 40m$$

y entonces para $v_{03} = 4 \cdot v_{01} = 160 \text{ km/h}$

$$\Delta x_3 = -\frac{(v_{03})^2}{2a} = -\frac{(4 \cdot v_{01})^2}{2a} = 16 \cdot \left[-\frac{(v_{01})^2}{2a} \right] = 16 \cdot \Delta x_1 = 160m$$

c) Para calcular la aceleración despejamos de la misma ecuación:

$$\Delta x = -\frac{v_0^2}{2a} \Rightarrow a = -\frac{v_0^2}{2\Delta x}$$

tomando cualquiera de los pares $(v_0; \Delta x)$:

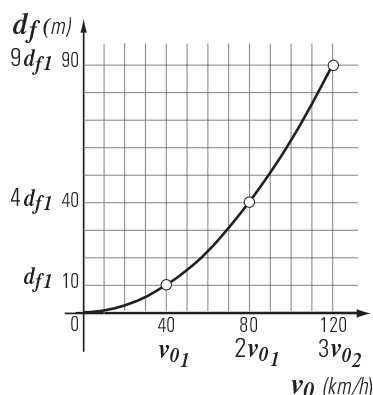
$$a = -\frac{(40 \text{ km/h})^2}{2 \cdot 10m} = -\frac{\left(40 \frac{1000m}{3600s}\right)^2}{2 \cdot 10m} = -6,17m/s^2$$

v_0 (km/h)	1(m)	2(m)	3(m)
40	8	10	18
50	10	15,6	25,6
60	12	22,5	34,5
70	14	30,6	44,6
80	16	40	56
90	18	50,6	68,6
100	20	62,5	82,5
110	22	75,6	97,6
120	24	90	114

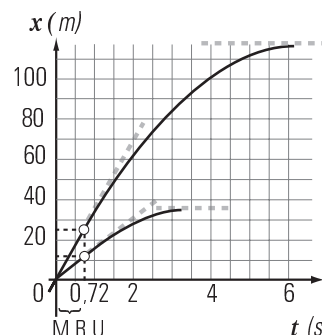
(1) Distancia recorrida por el vehículo en el tiempo de reacción (que es el tiempo que normalmente transcurre desde que el conductor observa un obstáculo hasta que pone el pie en el freno), expresada en metros.

(2) Distancia de frenado que recorre el vehículo desde que accionamos el freno hasta su detención total.

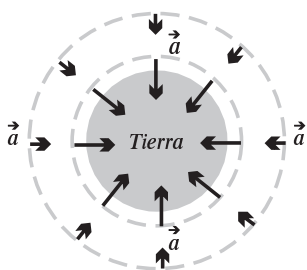
(3) Distancia de detención, considerada la suma de la distancia recorrida durante el tiempo de reacción más la distancia de frenado.



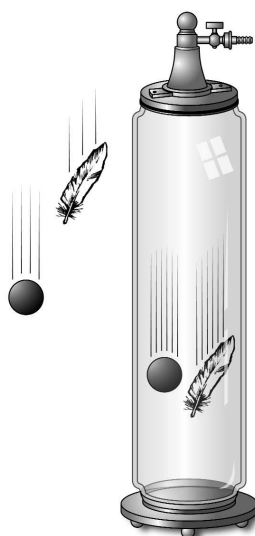
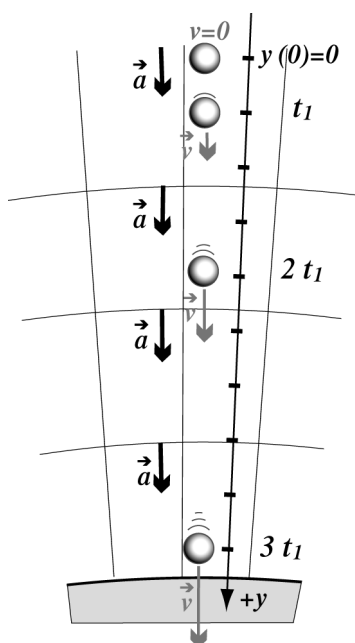
Distancia de frenado en función de la velocidad inicial



Posición en función del tiempo cuando la velocidad inicial es 60 km/h y cuando es 120 km/h



El vector aceleración de la gravedad apunta hacia el centro de la Tierra. Su intensidad disminuye al alejarnos de la superficie terrestre. En sus proximidades el valor de g se puede considerar constante.



Londres, 1659. Robert Boyle extrae el aire del interior de un cilindro con la bomba de vacío y consigue realizar la experiencia de la caída libre: una pluma y una bola metálica caen a la par dentro del tubo.

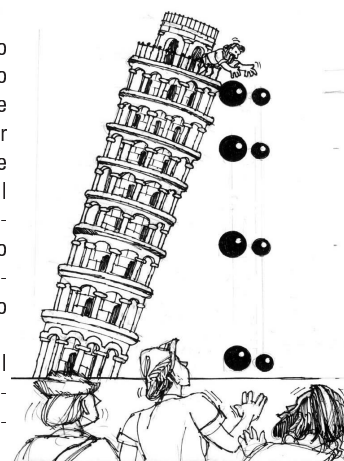
Movimientos verticales bajo la acción de la gravedad

Un objeto en las proximidades de la Tierra (o de cualquier otro cuerpo celeste) está sometido a la atracción gravitatoria. Si se lo deja caer o se lo arroja en el vacío o en situaciones en las que se puede despreciar la presencia del aire la aceleración del cuerpo es debida solamente a la atracción gravitatoria; la llamaremos aceleración de la gravedad y designaremos su valor absoluto con la letra g . El valor de g es independiente de la masa o cualquier otra característica del cuerpo en cuestión. Supondremos que esta aceleración es constante teniendo en cuenta que los movimientos considerados implican variaciones de altura pequeñas comparadas con el radio terrestre. Las condiciones que hemos expresado caracterizan un modelo físico que resulta adecuado para explicar ciertos movimientos y otros no.

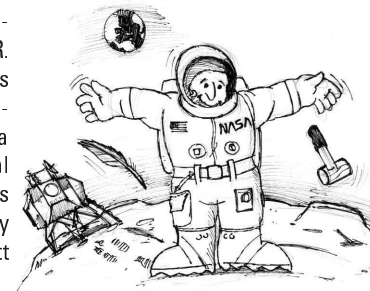
Por ejemplo, si dejamos caer en el aire desde un metro de altura una bolita y una hoja de papel el modelo es adecuado para describir la caída de la bolita pero no lo es para la hoja de papel, ya que en este caso la presencia del aire tiene una notable influencia en el movimiento. Si intentamos describir el ascenso de un cohete, aún en los intervalos de tiempo donde no exista otra acción importante además de la gravitatoria, probablemente las distancias involucradas determinen que no sea adecuada la aproximación de considerar a g de valor constante. En general, en las proximidades de la superficie terrestre, el valor de g tiene pequeñas variaciones. A nivel del mar, varía aproximadamente entre $9,78 \text{ m/s}^2$ en el ecuador y $9,83 \text{ m/s}^2$ en los polos. Suele trabajarse con un valor normal de $9,81 \text{ m/s}^2$ y para cálculos que no requieran una mejor aproximación utilizaremos el valor de 10 m/s^2 . En el ámbito biológico es común usar la aceleración de la gravedad como unidad independiente, por ejemplo una centrifugadora de diez mil gravedades.

Bajo las condiciones mencionadas, las caídas o tiros verticales a estudiar son casos particulares del movimiento rectilíneo uniformemente variado, donde el vector aceleración es vertical y hacia abajo, su valor absoluto es g . El signo de la aceleración, como el de cualquier vector, depende del sistema de referencia que adoptemos en cada problema.

Pisa, 1589. Algunos historiadores dudan de que Galileo haya realizado alguna vez el legendario experimento en el que deja caer objetos de diferentes pesos desde lo alto de la torre inclinada de Pisa para comprobar que llegan simultáneamente al suelo. Probablemente él ya anticipaba que en virtud de la fricción del aire el cuerpo más liviano llegaría algo más tarde que el pesado pero de todas maneras el famoso experimento habría refutado espectacularmente la errónea afirmación, atribuida a Aristóteles, según la cual un cuerpo diez veces más pesado cae diez veces más rápido. La contribución de Galileo consiste en romper con el punto de vista intuitivo, de nociones instintivas e imaginar la experiencia idealizada. ¿Qué importa si la leyenda de la torre inclinada de Pisa ocurrió o no?



La Luna, 1971. En la versión más efectista y "mediática" del famoso experimento el astronauta David R. Scott dice, mirando a la cámara, "Creo que una de las razones por las que estamos hoy aquí es que hace mucho tiempo Galileo hizo importantes estudios sobre la caída de los cuerpos en campos gravitatorios. ¿Cuál podría ser un lugar mejor para confirmar sus hallazgos que la Luna?" Scott suelta una pluma y un martillo y ambos objetos golpean el suelo al mismo tiempo. Scott agrega: "¡Vaya! El Sr Galileo estaba en lo correcto."



Ejemplo

Desde el piso se dispara verticalmente y hacia arriba un proyectil con una velocidad inicial de 30 m/s. Se desprecia la influencia del rozamiento con el aire.

- Calcular el instante en que alcanza la altura máxima.
- Hallar el valor de la altura máxima.
- Determinar en qué instante llega nuevamente al piso y con qué velocidad lo hace.
- Graficar para la situación descripta la aceleración, la velocidad y la posición en función del tiempo.

a) Tomamos un sistema de referencia con origen en el piso y sentido positivo hacia arriba. En consecuencia, los signos de la velocidad inicial y de la aceleración de la gravedad quedan definidos automáticamente (positivo y negativo, respectivamente). Cuando el movimiento se produce en dirección vertical es habitual expresar la posición con la letra y . Las ecuaciones horarias para el sistema de referencia escogido son:

$$a = -g$$

$$v(t) = v_0 - gt$$

$$y(t) = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

Cuando el proyectil tiene velocidad positiva está ascendiendo y cuando la velocidad es negativa está descendiendo luego de haber alcanzado la altura máxima. En el instante en que el proyectil alcanza su altura máxima tiene velocidad nula. Llamamos t_m a dicho instante.

$$0 = v_0 - g \cdot t_m \Rightarrow t_m = \frac{v_0}{g}$$

$$\text{usando } g = 10 \frac{m}{s^2} \Rightarrow t_m = \frac{30 \frac{m}{s}}{10 \frac{m}{s^2}} = 3s$$

b) A partir de la ecuación horaria de la posición en función del tiempo calculamos la altura máxima, que es la posición para $t = t_m$.

$$y_m = 30 \frac{m}{s} \cdot t_m - 5 \frac{m}{s^2} \cdot t_m^2 = 30 \frac{m}{s} \cdot 3s - 5 \frac{m}{s^2} (3s)^2 = 45m$$

c) Al llegar al piso en $t = t_p$ la posición del proyectil será nuevamente cero.

$$0 = 30 \frac{m}{s} t_p - 5 \frac{m}{s^2} t_p^2$$

Se trata de una ecuación de segundo grado sin término constante. La resolvemos extrayendo a t como factor común.

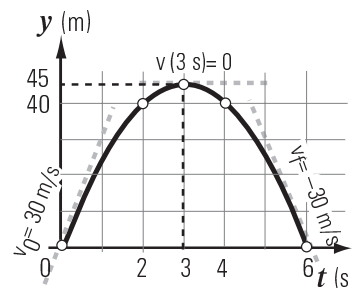
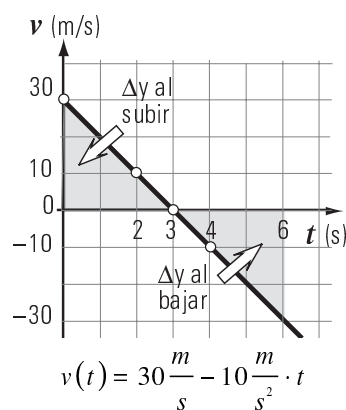
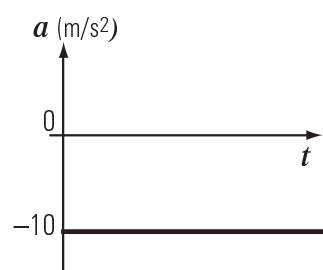
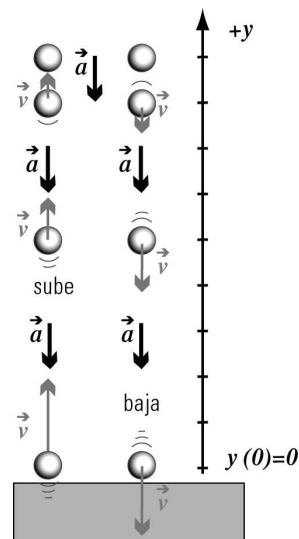
$$0 = \left(30 \frac{m}{s} - 5 \frac{m}{s^2} t_p \right) t_p$$

Los valores que resuelven esta ecuación son $t_p = 0$ y $t_p = 6$ segundos. El instante $t_p = 0$ es el correspondiente al instante del lanzamiento y el otro $t_p = 6$ s el que corresponde al momento en que el proyectil vuelve al piso.

La velocidad con que el proyectil vuelve al piso se calcula reemplazando 6 segundos en la ecuación horaria.

$$v(6s) = 30 \frac{m}{s} - 10 \frac{m}{s^2} \cdot 6s = -30 \frac{m}{s}$$

d) Con la información obtenida en los puntos anteriores construimos los gráficos pedidos.



$$y_m = 30 \frac{m}{s} \cdot t_m - 5 \frac{m}{s^2} \cdot t_m^2$$

Recordando la simetría de estos gráficos respecto de la recta vertical $t = t_m = 3$ s, observamos que para dos instantes de tiempo simétricos respecto a t_m (por ejemplo $t = 2$ s y $t = 4$ s) se cumple que el proyectil está a la misma altura (40 m), y tiene la misma rapidez (10 m/s), siendo la única diferencia que en un caso está ascendiendo y en el otro descendiendo.