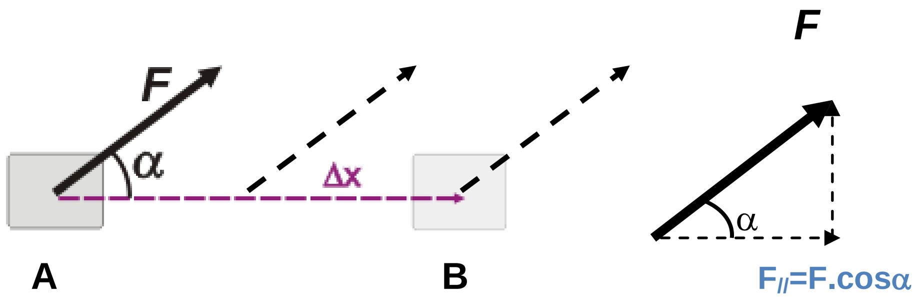
<u>TRABAJO (MECÁNICO) DE UNA FUERZA CONSTANTE</u>

Se define **trabajo mecánico** (**L**) como el producto entre el **módulo de una fuerza constante** aplicada a un cuerpo, el **módulo del desplazamiento del mismo** y el **coseno del ángulo** que forman los vectores que indican **la fuerza** y el **desplazamiento**:



$$L_{A\rightarrow B} = |F| \, . \, |\Delta x_{A,B}| \, . \cos\alpha = F_{//} \, . \, \Delta x_{A,B}$$

El trabajo **L** es un **escalar;** que puede ser **positivo, negativo** o valer **0.**

$$[L] = [F].[\Delta x_{A,B}] = N.m = \text{Joule} = J$$

$|F| \cos\alpha$ es la componente de la fuerza **en la direccion al desplazamiento Δx. Es la que produce el trabajo.**

El **signo** del **L** lo da el **cos α,** según como sea **α.**

Si $90^o > \alpha \geq 0$ **(agudo);** **1** $\geq$ **cos** $\alpha > 0$; **cos** 0^0 **= 1** (L: es positivo)

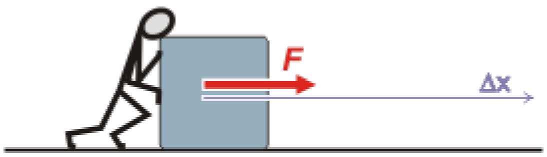
Si $180^o \geq \alpha > 90^o$ **(obtuso),** **0** $>$ **cos** $\alpha \geq$ **-1** ; **cos** 180^0 **= -1** (L es negativo)

Si $\alpha = 90^o$ **;** **cos** 90^0 **= 0 ;** **(L es = 0)**

<u>Veamos el siguiente ejemplo</u> (Prob 33 de la guía):

El empleado de una empresa de mudanzas desea transportar un mueble. Calcule el valor y el signo del trabajo entregado por el hombre al mueble en las cuatro situaciones que siguen:

a) Lo empuja con una fuerza de 1000 N, paralela al piso, a lo largo de 8 metros.

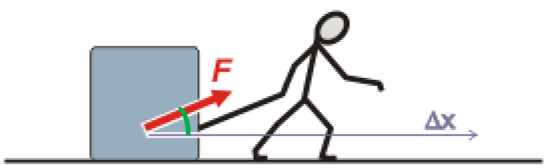


Claramente, ambos vectores; **F** y **Δx** forman un angulo α**=0º.**

Luego;

L = I**F**I.I**Δx**I.cos**0º** = ***1000N. 8m. 1= 8000 J***

b) Tira del mueble con una fuerza de 1000 N por medio de una soga que forma un ángulo de 30º con la horizontal a lo largo de 8 m.

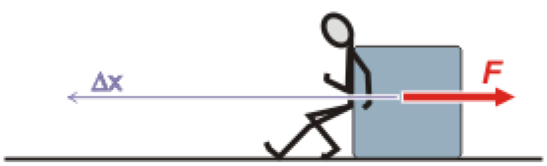


cos **30º** = 0,866

Ahora, **F** y **Δx** forman un angulo de **30º,** luego.

L = I**F**I.I**Δx**I.cos**30º** = ***1000N. 8m. 0.866= 6930 J***

c) El mueble se venía moviendo por un plano horizontal y el empleado lo detiene aplicándole una fuerza de 1000 N, paralela al piso, a lo largo de 6 metros.

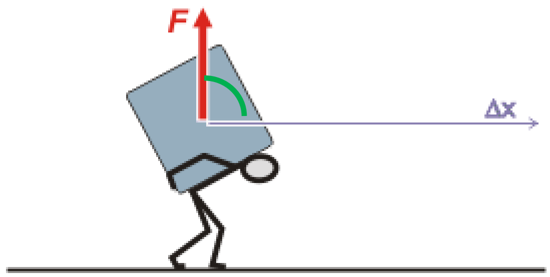


α=180º ; cos 180º = −1

En este caso, frenando al mueble, la **fuerza** y el **desplazamiento** forman un ángulo de **180 grados**.

L = I**F**I.I**Δx**I.cos**180º** = ***1000N. 6m. (-1)= - 6000 J***

d) Camina horizontalmente, con velocidad constante, cargando el mueble sobre sus hombros.

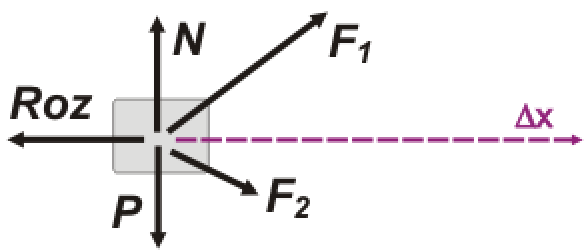


$\alpha = 90^o$; $\cos 90^o = 0$

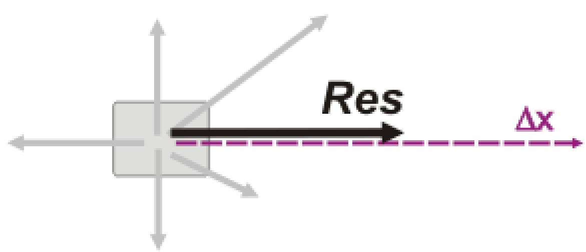
L= I**F**I.IΔ**x**I.cos**90°** = **0**

Varias fuerzas actuantes sobre un cuerpo

Cuando son varias las fuerzas actuantes sobre un cuerpo, y el cuerpo se desplaza; entonces, cada una de las fuerzas realiza un trabajo:



Tendremos un L_{ROZ} ; L_{F1} ; L_{F2} ;.....



$\sum F = F_{ROZ} + F_1 + F_2 + \ldots =$ **Resultante.**

Se puede demostrar además que:

$\sum L_{\text{todas las fuerzas}} = L_{ROZ} + L_{F1} + L_{F2} + \ldots = L_{RESULTANTE}$

Resultante = ma (2º ley de Newton); a = Δv/ Δt .

Se define la siguiente cantidad:

Energia cinetica= $E_C = \frac{1}{2} m.v^2 \geq 0$ (energía de movimiento)

Hay un teorema importante, que establece que (y vale siempre):

$$L_{Res}^{A\to B} = E_C^{B} - E_C^{A} = \frac{1}{2} m\, v_B^2 - \frac{1}{2} m\, v_A^2 = \Delta E_C \qquad (1)$$

A: POSICION INICIAL

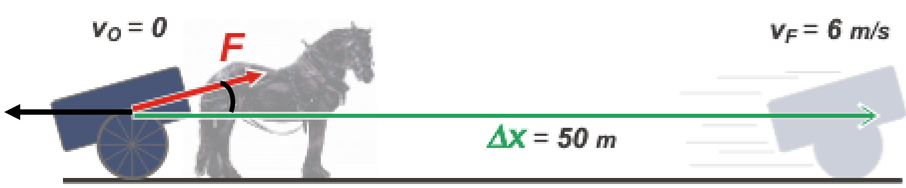
B: POSICION FINAL

Teorema de conservación de la energía

Ejemplo: P.34 Un caballo arrastra una carreta de **1.000 kg**, por un camino horizontal, a lo largo de 50 m. La lleva desde el reposo hasta una velocidad de **6 m/s.** La fuerza que hace el caballo, que es de **500 N**, forma un ángulo de **15º** con la dirección de avance de la carreta.

a) ¿Qué variación de energía cinética experimenta la carreta?
b) ¿Cuánto vale el trabajo realizado por la fuerza que ejerce el caballo sobre la carreta?
c) ¿Cuánto vale el trabajo de la **fuerza de rozamiento** carreta-piso?

(DIBUJADA EN COLOR NEGRO)



a) Variacion de energía cinetica de la carreta:

$$\Delta E_C = E_C^{f} - E_C^{0} = \frac{1}{2} m\, v_f^2 - \frac{1}{2} m\, v_0^2 = \frac{1}{2}\, 1000\text{kg}.(6\text{m/s})^2 - 0 = 18000\text{J}$$

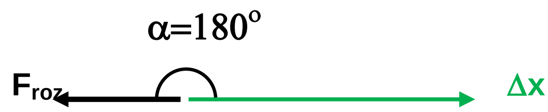
b) $L_{Fcab} = F.\Delta x.\cos(15º) = 500\text{N}.50\text{ m}.\ 0{,}966 = 24150\text{ J}$

c) $L_{Froz} = ?$. **Usar el teorema de conservacion de energia**

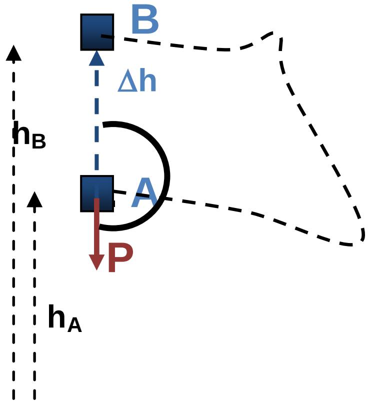
$$\Delta E_C = 18000\text{J} = \sum L_{\text{todas las fuerzas}} = L_{ROZ} + L_{Fcab} + \cancel{L_{Peso}} + \cancel{L_N}$$

El L_{Peso} y el L_N valen 0 (porque el **Peso** y la **N** son perpendiculares al **Δx**).

$L_{ROZ} = 18000\text{J} - L_{Fcab} = 18000\text{J} - 24150\text{J} = -6150\text{J}$



Fuerzas conservativas : Energia Potencial Gravitatoria



m (masa)

Energia potencial: $E_{Pg}=mgh$

(depende de la posición)

Si calculo el trabajo del **Peso** para **levantar** el cajon de masa **m** desde **A** hasta **B**, tendre:

$$L_{Peso}^{A\rightarrow B} = \text{Peso} \ . \ \Delta h . \cos 180^{o} = mg.(h_B - h_A).(-1) = -\ [\ mgh_B - mgh_A]$$

$$L_{Peso}^{A\rightarrow B} = -\ [E_{Pg}^{B} - E_{Pg}^{A}] = -\ \Delta E_{Pg} \qquad \textbf{(2)}$$

En este caso el **Lpeso es negativo**, la **energía potencia aumenta ΔE_{Pg} es positiva.**

Si L_{Peso} = -150 J, entonces ΔE_{Pg} = 150J.

Si en vez de levantarlo, lo hago descender: Lo llevo de **B** $\longrightarrow$ **A**

L_{Peso} sera positivo ; ΔE_{Pg} será negativa (La energía potencial disminuye):

Ahora **L_{Peso} = 150 J, entonces ΔE_{Pg} = -150J**

El trabajo del peso **depende solamente** de la **posición inicial (A)** y de la **posición final (B)**. **No depende del camino** (curva en línea punteada negra) que haga para ir de A a B. El **Peso** es una **fuerza conservativa.**

Las demás fuerzas, **F_{roz}**, **N**, **F_{ext}**, **T** no tienen esta propiedad (**Fuerzas no conservativas).**

El **nivel de referencia** (**h=0**) para calcular la **E_{pg}** es arbitrario, con lo cual el valor de la **E_{pg}** depende del nivel de referencia.

Energia mecánica o total: $E_{mec} = E_{cin} + E_{pg}$ **(Las 3 energias en el mismo punto).**

Usando (1) y (2), se puede demostrar que:

$$\sum L_{\text{fuerzas no conser}} = E_{mec}^{f} - E_{mec}^{i} = \Delta E_{mec} \qquad (3)$$

<u>Ejemplo sencillo</u>: Arrojo verticalmente un cuerpo de m=1kg con una v_i=30m/s. ¿Cuál será su altura máxima?

Solucion: La única fuerza actuante es el **P (conservativa).**

No hay fuerzas no conservativas, entonces, de (3):

$$L_{\text{fuerzas no conser}} = 0 = E_{mec}^{f} - E_{mec}^{i}$$

$E_{mec}^{f} = E_{mec}^{i}$ **(** La energía mecánica **no cambia, es constante)**

<u>1º conclusión importante</u> : Cuando la única **fuerza actuante es el Peso,** entonces**, la energía mecánica del cuerpo se mantiene constante.**

Si elijo:$h_{piso} = 0$; entonces: $E_{mec}^{i} = E_{cin}^{i} = ½.m.\ v_i^2 = ½.1kg.(30m/s)^2 = 450J$

A medida que vaya ascendiendo, el cuerpo ganara E_{pg} y perdera E_{cin}, de forma tal que:

$$E_{mec} = E_{cin} + E_{Pg} = \text{constante} = 450J$$

En particular, cuando alcance la altura máxima, se detendrá ($v^f=0$; $E_{cin}^f=0$), luego:

$$E_{Pg}^{f} = E_{mec}^{f} = 450J = m.g.h_{max}\ ;$$

$h_{max} = 450J/1kg.10m/s^2 = 45\ m.$

$$L_{RESULTANTE} = \sum L_{\text{todas las fuerzas}} = \Delta E_C \qquad (1)$$

$$L_{Peso} = -\Delta E_{Pg} \qquad (2)$$

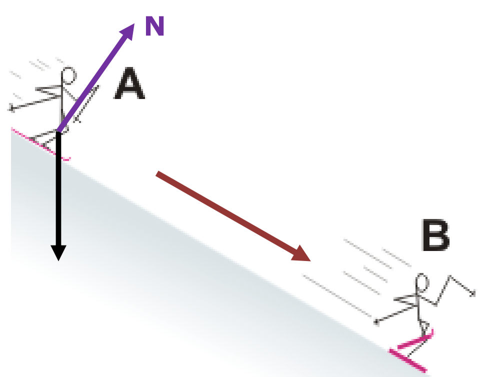
$$\sum L_{\text{fuerzas no conser}} = \Delta E_{mec} = \Delta E_C + \Delta E_{Pg} \qquad (3)$$

<u>Problema 32</u>: **Un esquiador de 80 kg se deja caer por una colina de 30 metros de altura,** partiendo con una **velocidad inicial de 6 m/s. No se impulsa con los bastones y se puede despreciar el rozamiento con la nieve y con el aire.**

a) ¿Cuál es la **energía mecánica inicial del esquiador? ¿Cambia este valor a lo largo del recorrido?** Justifique su respuesta analizando las fuerzas que actúan sobre el esquiador.
b) **¿**Con qué **velocidad llega el esquiador al pie de la colina?**
c) ¿Qué debería hacer el esquiador para llegar **al pie de la colina con una velocidad de 30 m/s?** Justifique su respuesta sobre la base de consideraciones dinámicas y energéticas (dé valores numéricos).
d) **¿**Y si quisiera llegar con una **velocidad de 15 m/s?**

ACLARACION:Las condiciones del enunciado solo se deben aplicar a los incisos **a)** y **b).**

a) Hagamos un esquema del problema:



Tengo datos del punto A: $\mathbf{v_A = 6\ m/s}$; $\mathbf{h_A=30\ m}$ **(elegimos** $\mathbf{h_B=0}$**); m=80kg**

Con esos datos puedo calcular la $\mathbf{E_{mec}^A = E_{cin}^A + E_{pg}^A}$

$$\mathbf{E_{mec}^A} = \tfrac{1}{2}\ \mathbf{.80\ kg.\ (6m/s)^2 + 80\ kg.10m/s^2.30m = 25440\ J}$$

¿Y que pasa con la **energia mecánica** del esquiador ? Ver si **cambia** o se **mantiene constante.**

Hay que mirar **aca**:

$$\sum \mathbf{L}_{\textbf{fuerzas no conser}} = \Delta \mathbf{E_{mec}}\ .$$ Se analiza entre dos puntos **(A** y **B)**

La única fuerza **no conservativa** aplicada al **esquiador** es la Normal **N,** pero no realiza trabajo:

L_N**=0** (Porque **N** es **perpendicular** al **Δx** del esquiador).

Entonces : **ΔE_{mec}=0** ⟶ **E_{mec} = constante = 25440J** (a lo largo del descenso).

b) Calcular la **velocidad del esquiador** en el punto **B**: **V_B**

Como la **energía mecánica** del esquiador no cambia mientras desciende, entonces:

En particular**:** $E_{mec}^B = 25440J = E_{cin}^B$; $E_{pg}^B = 0$ **(h_B=0)**

$E_{cin}^B = \frac{1}{2}\ 80kg.\ (v_B)^2 = 25440J$; despejo **v_B:**

$$v_B = \sqrt{25440/40} = 25{,}22\ m/s$$

c) Si el esquiador quiere **llegar a la base (B)** con una **velocidad de 30 m/s**, entonces, **deberá tener** en **B** una **energía mecánica mayor a 25440 J**:

Exactamente**:** $E`_{mec}^{B}$ = **½.80kg. (30 m/s)^2 = 36000J**

Como la E_{mec}^A **=25440J, entonces:**

el cambio $\Delta E_{mec}^{A\to B}$= 36000J – 25440J =10560J(Es decir**, gano 10560J)**

Su energía mecánica, desde A hasta B, debe aumentar en 10560J

¿Cómo consigo aumentar la energía mecánica?

$\sum L_{\text{fuerzas no conser}}^{A\to B}$ **= 10560J**

Sabemos que no hay **rozamiento,** y la fuerza **N no realiza trabajo.** Asi que debe haber alguna **otra fuerza (no conservativa)** que **realice trabajo (positivo e = 10560J).** Esta **fuerza** la proporciona **la nieve a los bastones,** cuando el esquiador se impulsa con los bastones (3º ley de newton; los **bastones** aplican una fuerza a la **nieve**; la **nieve** aplica una fza = y contraria a los **bastones**).Esta **$F_{\text{nieve, bastones}}$** tiene la **misma dirección y sentido que el desplazamiento** , y en consecuencia, produce un **trabajo positivo:**

$L_{\text{Fnieve, bastones}}^{A\to B}$ **= 10560J.**

d) Si ahora quiere llegar a B con una **v= 15m/s** (**menor** a **25,22m/s**), deberá tener en **B** una **energía mecánica menor** a **25440J.** Mas precisamente:

$E``_{mec}{}^{B}$= ½.80kg(**15m/s**)^2= **9000J.**

Ahora, la energia mecanica **cambio en**:

$\Delta E_{mec}{}^{A \rightarrow B}$**= 9000J – 25440J= -16440J** **(** Es decir**, perdió 16440J)**

En este caso, los **mismos bastones** proporcionaran la fuerza para producir esta **disminución de E mecánica**, pero ahora:

$$L_{\text{Fnieve, bastones}}{}^{A \rightarrow B} = -16440J$$

En este caso, la $F_{\text{nieve, bastones}}$ deberá **oponerse al desplazamiento,** y en consecuencia, hara un **trabajo negativo.**

<u>Trabajo de Fuerzas variables</u>

La expresión de Trabajo de una fuerza dada al comienzo:

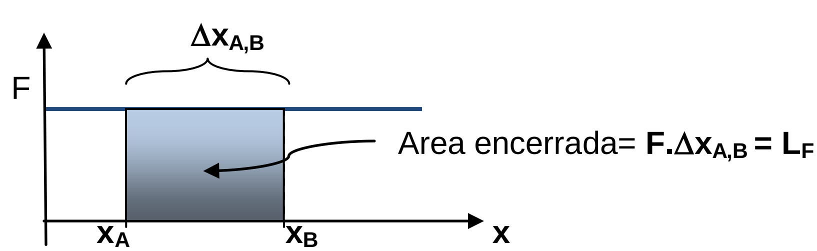
$$L_{A \rightarrow B} = |F| . |\Delta x_{A,B}| . \cos \alpha$$

Ya **no es valida** cuando la fuerza aplicada va **cambiando** (ya sea en magnitud o en dirección) durante el desplazamiento Δx**.**

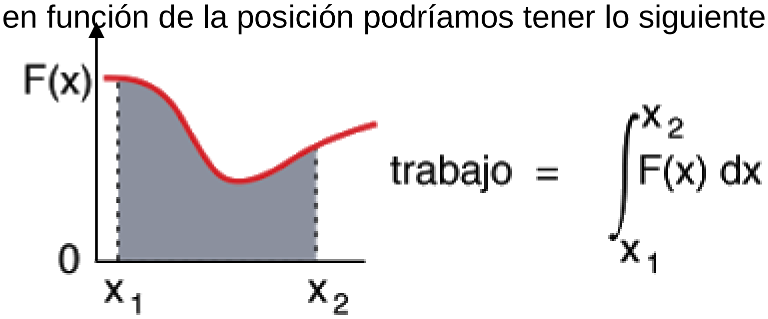
Si **F** es constante y paralela al desplazamiento (α**=0**), el trabajo de F seria:

$$L=F. \Delta x$$

Si graficamos esta fuerza en función de la posicion, veriamos algo asi:



Si la fuerza aplicada **es variable** (considerar siempre que **F** // **Δx**), al graficar esta fuerza en función de la posición podríamos tener lo siguiente:



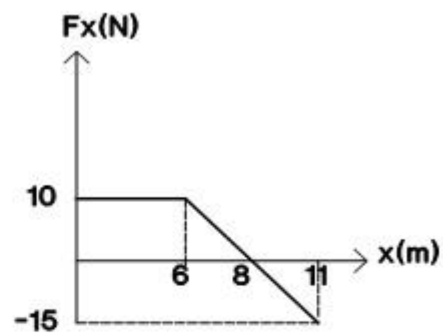
El trabajo hecho por esta fuerza variable **F(x)** para desplazarse de **x_1** a **x_2,** es **igual al area encerrada.** (Si se conoce **F=f(x)** se calcula como una integral definida).

En el presente curso, analizaremos casos sencillos, que se pueden calcular como superficies o areas de rectángulos o triangulos.

Veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo:

*Sobre una masa de **30 kg** actúa una **resultante** que varía de acuerdo con el siguiente gráfico. Si sabemos que **parte del reposo** calcular:*



a) La velocidad del cuerpo a los 6, 8 y 11 m de su recorrido.

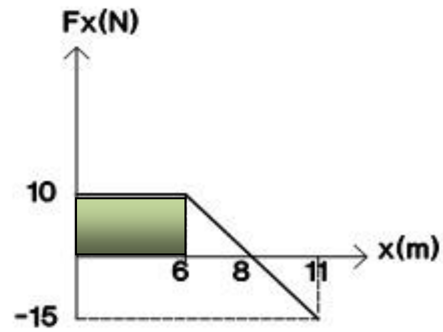
Aclaracion: F_x es la componente de la **resultante** en la **dirección del eje x** de la fuerza aplicada (que es la dirección del movimiento).

Solucion: Como se trata de la **Resultante,** podemos aplicar el teorema del Trabajo y la Energia:

$$L_{RESULTANTE} = \Delta E_C$$ (siempre es entre 2 puntos; **inicial** y **final**).

El **trabajo de la resultante** lo sacamos del **area encerrada** en la grafica.

De la grafica, vemos que **F_X (**o la **resultante**, es lo mismo**)** es **constante** e igual a **10N** entre **x=0** y **x=6m**; el valor positivo nos dice que **F_X=10N** tiene el **mismo sentido** que el **desplazamiento** (también **positivo**) **.** Entonces el trabajo de **F_X** será positivo, es decir:



Para calcular la **velocidad** a los **6 m** planteo:

$$L_{Fx}^{0\to 6m} = L_{RESULTANTE} = +\text{area rectángulo} = 6m.10N = 60J$$

$$L_{RESULTANTE} = 60J = \Delta E_C^{0\to 6m} = E_{C(6m)} - \cancel{E_{C(0)}} = \tfrac{1}{2}.30kg.[v_{(6m)}]^2$$

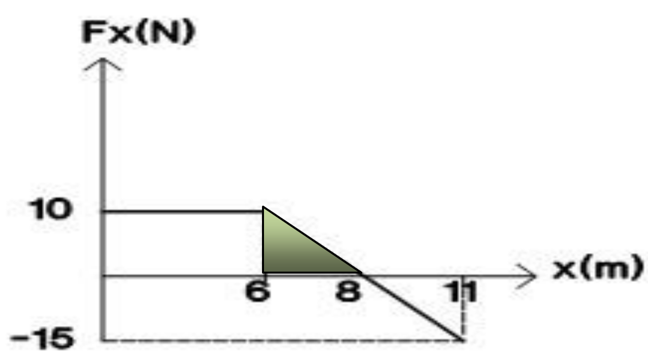
Despejo la $v_{(6m)} = \sqrt{60J/15kg} = 2m/s$

¿Como calculo la velocidad a los 8m?

Puedo plantear:

$$L_{Fx}^{6m\to 8m} = \Delta E_C^{6m\to 8m} = E_{C(8m)} - E_{C(6m)}$$

El $L_{Fx}^{6m\to 8m}$ = **Area del triangulo sombreado (es positivo)**



$$L_{Fx}^{6m\to 8m} = (2m.10N)/2 = 10J = \tfrac{1}{2}.30kg.[v_{(8m)}]^2 - 60J$$

Despejo $v_{(8m)} = \sqrt{(10+60J)/15kg} = 2{,}16m/s$

Y la $E_{C(8m)} = 70J$

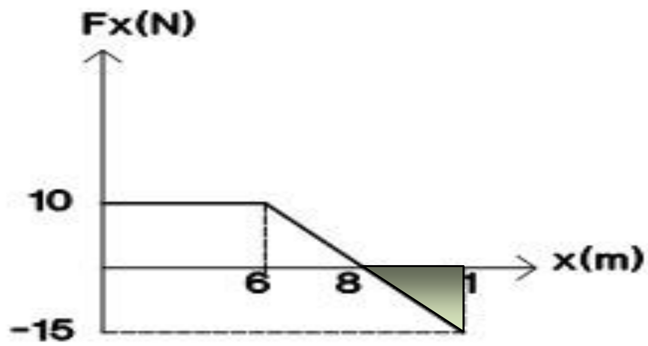
¿Como calculo la velocidad a los 11m?

Puedo plantear:

$$L_{Fx}^{8m \to 11m} = \Delta E_C^{8m \to 11m} = E_{C(11m)} - E_{C(8m)}$$

Pero ahora, F_X toma **valores negativos** entre **8m y 11m.** Significa que F_X apunta en **sentido opuesto al desplazamiento (eje x), y entonces hace trabajo negativo:**

$L_{Fx}^{8m \to 11m}$ = **Area del 2º triangulo sombreado (**valor negativo**)**



$$L_{Fx}^{8m \to 11m} = 3m.(-15N)/2 = -22,5J = \tfrac{1}{2}.30kg.[v_{(11m)}]^2 - 70J$$

Despejo $v_{(11m)} = \sqrt{(-22,5 + 70J)/15kg} = 1,78m/s$

A partir de **x=8m**, el cuerpo **disminuye su velocidad ¿Dónde alcanzo la v_{max}**?

<u>Potencia mecánica</u> :

Es una magnitud que describe **la rapidez con la que cambia la energía**. Por ejemplo, si dos grúas levantan **igual peso**, a la **misma altura**, las dos realizan **el mismo trabajo**. Pero para la grúa que lo levante **más rápido** diremos que la potencia desarrollada **fue mayor** porque realizo el mismo trabajo en menor tiempo (es decir, lo hizo mas rápido):

Se define, Potencia media:

$$P_{\mathbf{Media},} = \frac{\boldsymbol{L}}{\boldsymbol{\Delta t}}$$

Es el cociente entre el Trabajo realizado por una fuerza y el tiempo empleado:

Unidades:

[P]= [L] / [$\Delta \mathbf{t}$] **=** J/s = watt=w (S.I.)

Otras unidades: El **HP (** Horse Power**);** **1HP=746 w**

El **CV (**Caballo Vapor**)** ; **1CV = 735 W**

Como **L = F.** $\Delta \mathbf{x} \longrightarrow \boldsymbol{P}_{\mathbf{Media}} = \frac{\boldsymbol{L}}{\boldsymbol{\Delta t}} = \mathrm{F}.\frac{\boldsymbol{\Delta x}}{\boldsymbol{\Delta t}} = \mathbf{F}.\,\mathbf{v}_{\mathbf{media}}$

$\mathbf{P}_{\mathbf{ins\ (t)}} = \mathbf{F.v}_{\mathbf{ins\ (t)}}$**,** **Potencia instantanea**

A veces solo se conoce el cambio de energia mecánica de un cuerpo (por ejemplo, cuando es elevado por una grua). En esos casos, se calcula la potencia como:

$$\mathbf{P} = \frac{\boldsymbol{\Delta E}}{\boldsymbol{\Delta t}}$$

Una unidad de **energia** derivada del watt es el **Kw.h.**

Potencia= Energia /tiempo $\longrightarrow$ Energia =Potencia . Tiempo

Imaginemos un artefacto eléctrico que consume una potencia de **1Kw**=1000w=1000j/s. Significa que **por segundo** este artefacto consume una energía de **1000J.**

Si lo dejásemos encendido **1 hora,** consumiría una energía de:

1Kwh = 1Kw. 1h =1000w.3600s= 3.600.000 J=**$3{,}6.10^6$ J**

Ejemplo 1: Calcular la potencia que realiza una máquina para elevar en **10 seg**, un cuerpo de **50 kg**, hasta una altura de **20 m** en los siguientes casos:

a) ***Verticalmente a velocidad constante.***

b) Verticalmente desde el reposo, hasta una velocidad final de 20 m/s.

a) Si el ascenso se produce a **velocidad constante** la energía entregada por la máquina **aumenta la energía potencial gravitatoria del cuerpo**, ya que la **cinética es constante**.

$$Potencia = \frac{\Delta E_{mec}}{\Delta t} = \frac{P \cdot h_f - P \cdot h_i}{t} = \frac{500N \cdot 20m}{10seg} = 1000\,Watt$$

b) En este caso el cuerpo no solamente **aumenta su energía gravitatoria**, también el trabajo de la máquina le hace **aumentar la energía cinética**.

$$Pot = \frac{\Delta E_{mec}}{\Delta t} = \frac{\left(1/2m \cdot v_f^{\,2} + P \cdot h_f\right) - \left(1/2m \cdot v_i^{\,2} + P \cdot h_i\right)}{t} = \frac{1/2 \cdot 50kg \cdot (20m/s)^2 + 500N \cdot 20m}{10seg} = 2.000\,Watt$$