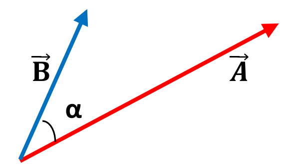
Producto vectorial de dos vectores.

Para notar el producto vectorial utilizaremos el símbolo "X"

Cuando se multiplican vectorialmente dos vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$, se obtiene otro vector $\vec{\mathbf{C}}$.

$\vec{\mathbf{A}}$ X $\vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{C}}$

En el esquema se muestran los vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ que queremos multiplicar vectorialmente. LLamamos α al ángulo menor entre los vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$.



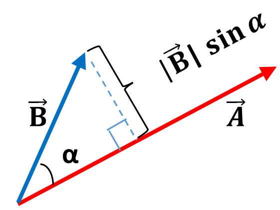
Características de $\vec{\mathbf{C}}$:

Módulo de $\vec{\mathbf{C}}$

$|\vec{\mathbf{C}}| = |\vec{\mathbf{A}}|\ |\vec{\mathbf{B}}|\ \mathbf{sin}\,\boldsymbol{\alpha}$

Para interpretar el $|\vec{\mathbf{C}}|$, trazamos una perpendicular al vector $\vec{\mathbf{A}}$ que pase por el extremo de $\vec{\mathbf{B}}$.

Vemos que $|\vec{\mathbf{B}}|\ \mathbf{sin}\,\boldsymbol{\alpha}$ es la componente escalar de $\vec{\mathbf{B}}$ en la dirección perpendicular de $\vec{\mathbf{A}}$.



Entonces el módulo de $\vec{\mathbf{C}}$ es igual al módulo de $\vec{\mathbf{A}}$ multiplicado por la componente escalar de $\vec{\mathbf{B}}$ en la dirección perpendicular de $\vec{\mathbf{A}}$.

(Observación: como 0 ≤ α ≤ 180°, el $\sin\alpha$ jamás es negativo para ese rango de ángulos, como corresponde al módulo de cualquier vector.)

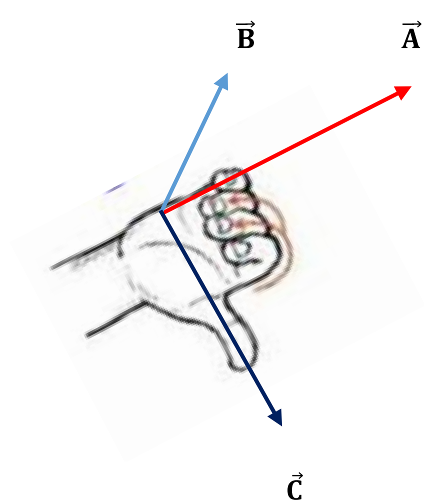
Dirección de $\vec{\mathbf{C}}$

Es perpendicular al plano al que pertenecen $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$.

Sentido de $\vec{\mathbf{C}}$

Está dado por la regla de la mano derecha.

Si queremos hacer el producto vectorial $\vec{\mathbf{A}}$ X $\vec{\mathbf{B}}$, ponemos el canto de la mano derecha sobre el primer vector ($\vec{\mathbf{A}}$) y la palma de la mano mirando hacia el segundo vector ($\vec{\mathbf{B}}$), giramos los dedos hacia el segundo vector ($\vec{\mathbf{B}}$), recorriendo el ángulo menor.
El vector $\vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{A}}$ X $\vec{\mathbf{B}}$ apunta hacia donde apunta el dedo pulgar extendido.



Importante:
El producto vectorial es anticonmutativo. Si invertimos el orden de los vectores que estamos multiplicando, se invierte el sentido del vector resultante.
$\vec{\mathbf{B}}$ X $\vec{\mathbf{A}}$ = - $\vec{\mathbf{A}}$ X $\vec{\mathbf{B}}$

Casos particulares:

● Si α = 0° ó α = 180° (los vectores $\vec{\mathbf{A}}$ **y** $\vec{\mathbf{B}}$ **son paralelos**, de igual sentido o sentido contrario), $\sin\alpha$ = 0, con lo cual

$|\vec{\mathbf{C}}| = |\vec{\mathbf{A}}|\ |\vec{\mathbf{B}}|\ \sin\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$, entonces

$\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = \mathbf{0}$

El producto vectorial de dos vectores paralelos da cero, porque al ser los dos vectores paralelos no hay proyección de un vector en la dirección perpendicular del otro.

En particular, el producto vectorial de un vector consigo mismo es cero.
Si lo aplicamos a los versores asociados a los ejes cartesianos, obtenemos:

$\hat{\boldsymbol{x}} \times \hat{\boldsymbol{x}} = \mathbf{0}$

$\hat{\boldsymbol{y}} \times \hat{\boldsymbol{y}} = \mathbf{0}$

$\hat{\boldsymbol{z}} \times \hat{\boldsymbol{z}} = \mathbf{0}$

● Si α = 90° (los vectores $\vec{\mathbf{A}}$ **y** $\vec{\mathbf{B}}$ **son perpendiculares**), $\sin 90°$ = 1, con lo cual

$|\vec{\mathbf{C}}| = |\vec{\mathbf{A}}|\ |\vec{\mathbf{B}}|$ (la proyección de $\vec{\mathbf{B}}$ en la dirección perpendicular de $\vec{\mathbf{A}}$ es todo el módulo de $\vec{\mathbf{B}}$)

Si lo aplicamos a los versores asociados a los ejes cartesianos, y teniendo en cuenta que los versores tienen módulo 1:

$|\ \hat{\boldsymbol{x}} \times \hat{\boldsymbol{y}}\ | = \mathbf{1}$

$|\ \hat{\boldsymbol{y}} \times \hat{\boldsymbol{z}}\ | = \mathbf{1}$

$|\ \hat{\boldsymbol{z}} \times \hat{\boldsymbol{x}}\ | = \mathbf{1}$

Así que cuando hagamos los productos vectoriales de dos versores distintos, vamos a obtener otro vector perpendicular al plano al que pertenecen ellos dos, de módulo 1, o sea el otro versor que no interviene en la multiplicación, y el sentido lo dará la regla de la mano derecha.

$\hat{\boldsymbol{x}} \times \hat{\boldsymbol{y}} = \hat{\boldsymbol{z}}$

$\hat{\boldsymbol{y}} \times \hat{\boldsymbol{z}} = \hat{\boldsymbol{x}}$

$\hat{\boldsymbol{z}} \times \hat{\boldsymbol{x}} = \hat{\boldsymbol{y}}$

Si invertimos el orden de los versores en la multiplicación, como el producto vectorial es anticonmutativo, nos da el mismo versor pero cambiado de signo.

$\hat{\boldsymbol{y}} \times \hat{\boldsymbol{x}} = -\ \hat{\boldsymbol{z}}$

$\hat{\boldsymbol{z}} \times \hat{\boldsymbol{y}} = -\ \hat{\boldsymbol{x}}$

$\hat{\boldsymbol{x}} \times \hat{\boldsymbol{z}} = -\ \hat{\boldsymbol{y}}$

Regla nemotécnica: $\hat{x} \quad \hat{y} \quad \hat{z} \quad \hat{x} \quad \hat{y}$

La flecha azul indica que hacemos el producto vectorial $\hat{x}$ X $\hat{y}$ y el resultado es el versor que tiene a su derecha: $\hat{z}$**.**

La flecha roja indica que hacemos el producto vectorial $\hat{y}$ X $\hat{z}$ y el resultado es el versor que tiene a su derecha: $\hat{x}$**.**

La flecha verde indica que hacemos el producto vectorial $\hat{z}$ X $\hat{x}$ y el resultado es el versor que tiene a su derecha: $\hat{y}$**.**

La flecha naranja indica que hacemos el producto vectorial $\hat{y}$ X $\hat{x}$ y el resultado es el versor que tiene a su izquierda cambiado de signo: **-** $\hat{z}$**.**

La flecha amarilla indica que hacemos el producto vectorial $\hat{x}$ X $\hat{z}$ y el resultado es el versor que tiene a su izquierda cambiado de signo: - $\hat{y}$**.**

La flecha rosa indica que hacemos el producto vectorial $\hat{z}$ X $\hat{y}$ y el resultado es el versor que tiene a su izquierda cambiado de signo: **-** $\hat{x}$**.**

Ejemplos:

a) Dados $\vec{A} = 2\,\hat{x}$ y $\vec{B} = 5\,\hat{x} - 3\,\hat{y}$, hallar $\vec{A} \times \vec{B}$.

$\vec{A} \times \vec{B} = 2\,\hat{x} \times (5\,\hat{x} - 3\,\hat{y})$

Aplicamos la propiedad distributiva conservando el orden.

$\vec{A} \times \vec{B} = 10\,(\hat{x} \times \hat{x}) - 6\,(\hat{x} \times \hat{y})$

El primer paréntesis vale cero porque estamos multiplicando vectorialmente dos vectores paralelos.

El segundo paréntesis, según indica la flecha azul, vale $\hat{z}$**.**

$\vec{A} \times \vec{B} = -6\,\hat{z}$

b) Dados $\vec{A} = 4\,\hat{y} - 7\,\hat{z}$ y $\vec{B} = 9\,\hat{x} + 2\,\hat{z}$, hallar $\vec{A} \times \vec{B}$.

$\vec{A} \times \vec{B} = (4\,\hat{y} - 7\,\hat{z}) \times (9\,\hat{x} + 2\,\hat{z})$

Aplicamos la propiedad distributiva conservando el orden.

$\vec{A} \times \vec{B} = 36\,(\hat{y} \times \hat{x}) + 8\,(\hat{y} \times \hat{z}) - 63\,(\hat{z} \times \hat{x}) - 14\,(\hat{z} \times \hat{z})$

El primer paréntesis, según indica la flecha naranja, vale **-** $\hat{z}$**.**

El segundo paréntesis, según indica la flecha roja, vale $\hat{x}$ **.**

El tercer paréntesis, según indica la flecha verde, vale $\hat{y}$.

El cuarto paréntesis, vale cero porque estamos multiplicando vectorialmente dos vectores paralelos.

Entonces,

$\vec{A} \times \vec{B} = -36\,\hat{z} + 8\,\hat{x} - 63\,\hat{y}$