Trabajo de fuerzas variables

Cuando las fuerzas que actúan sobre un objeto varían con la posición, tal el caso de la fuerza elástica, la fuerza electrostática o la fuerza gravitatoria*, se debe recurrir a la definición más general de trabajo. El trabajo de fuerzas variables se calcula como la integral a lo largo del recorrido del producto escalar entre la fuerza y el diferencial de desplazamiento. Para una trayectoria rectilínea según el eje x, y utilizando la componente de la fuerza en la dirección del desplazamiento, el trabajo se calcula como:

$$L_{\vec{F}}^{A \to B} = \int_{xA}^{xB} F_x \cdot dx$$

$F_x = |\vec{F}| \cdot \cos\alpha$

α es el ángulo entre $\vec{F}$ y d$\vec{x}$ (que tiene el sentido del movimiento)

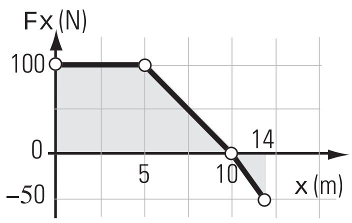
Si $\alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\alpha > 0$ Si $\alpha > \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\alpha < 0$

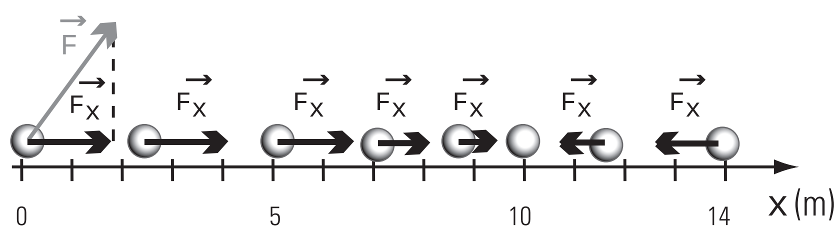
Expresión en la que Fx indica la componente x de la fuerza

Si se dispone de un gráfico de Fx en función de la posición x, el módulo del trabajo estará dado por el área encerrada entre la curva Fx (x) y el eje de la posición. El signo del trabajo dependerá de que el vector proyección de la fuerza en el eje x y el vector despazamiento tengan igual o distinto sentido.

Ejemplo

El gráfico de la izquierda muestra cómo varía en función de la posición la componente Fx de una fuerza que actúa sobre un cuerpo que se mueve sobre una recta paralela al eje x.





Entre x = 0 m y x = 5 m el módulo del vector $\vec{F}$x permance constante y su sentido es el del sistema de referencia. Entre x = 5 m y x = 10 m disminuye linealmente en función de la posición. En x = 10 m Fx es nula; entre esta posición y x = 14 m el sentido del vector $\vec{F}$x es contrario al del eje x y el módulo aumenta linealmente con la posición.

Calculemos el trabajo realizado por esta fuerza sobre el cuerpo cuando el mismo se desplaza entre x = 0 y x = 14 m. :

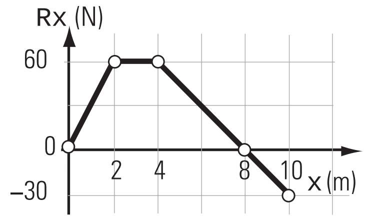
$$L_{\vec{F}}^{0 \to 14m} = 100\ N \cdot 5\ m + \frac{100\ N \cdot (10\ m\ -\ 5\ m)}{2} - \frac{50\ N \cdot (14\ m\ -\ 10\ m)}{2} = 650\ J$$

Observemos que el trabajo es negativo cuando el cuerpo se desplaza entre x = 10 m y x = 14 m en concordancia con el hecho de que la fuerza y el desplazamiento tienen sentidos opuestos.

Actividad: calcule el trabajo de esta fuerza cuando el objeto se desplaza entre x = 14 m y x = 0. rplaza entre x = 14 m y x = 0.

Ejemplo

El gráfico de fuerza en función de la posición de la derecha corrresponde a un cuerpo que parte del reposo en $x = 0$ y se mueve sobre una recta paralela al eje x. En el eje vertical se representa a la componente de la resultante en la dirección del movimiento (Rx).



a) Sin hacer cuentas, determine en qué posición la velocidad del cuerpo alcanza su valor máximo.

b) Calcule la velocidad del cuerpo en $x = 10$ m

Observemos que en algunos tramos la fuerza resultante y por ende la aceleración no es constante. No hemos visto como tratar en cinemática aceleraciones variables y por lo tanto no podríamos encontrar en forma detallada $x = x(t)$ y $v = v(t)$. El teorema del trabajo y la energía cinética nos permite conocer, a partir de la velocidad en algún punto, las velocidades en cualquier punto de la trayectoria.

Como el cuerpo parte del reposo su velocidad en una posición cualquiera xf se calcula a partir de la expresión

$$L_{R_x}^{x_0 \to x_f} = \Delta E_C = \frac{1}{2} m v_f^{\,2} - \frac{1}{2} m v_0^{\,2} = \frac{1}{2} m v_f^{\,2}$$

Recordemos que si se dispone de un gráfico de Rx en función de la posición x, el trabajo estará dado por el área encerrada entre la curva $Rx(x)$ y el eje de la posición.

Analizando el gráfico vemos que el trabajo de Rx es positivo hasta $x = 8$ m porque la fuerza y el desplazamiento tienen el mismo sentido y negativo entre 8 m y 10 m porque la fuerza invierte su sentido. Es evidente que valor máximo de la energía cinética se obtiene para $x = 8$ m.

Para calcular la velocidad del cuerpo para x = 10 m, que llamaremos vf

$$\tfrac{1}{2} m v_f^{\,2} - 0 = L_{R_x}^{0 \to 10m} = L_{R_x}^{0 \to 2m} + L_{R_x}^{2m \to 4m} + L_{R_x}^{4m \to 8m} + L_{R_x}^{8m \to 10m}$$

$$\tfrac{1}{2} m v_f^{\,2} = 60J + 120J + 120J - 30J = 270J$$

$$\Rightarrow v_f = \sqrt{\frac{2\ .270J}{60kg}} = 3\frac{m}{s}$$

Potencia

En la práctica es importante el tiempo empleado en realizar cierto trabajo. Por ejemplo, para subir un objeto por un plano inclinado y detenerlo al llegar, el trabajo realizado es el mismo aunque se lo suba rápido o lento. La magnitud que mide la tasa de cambio de la energía de un sistema, o lo que es lo mismo, la rapidez con la que se realiza trabajo sobre el sistema se denomina **potencia**. Como se trata de una variación en el tiempo, se podrá definir una potencia instantánea y una potencia media.

Para cada fuerza $\vec{F}$ que realiza un trabajo **L** sobre un cuerpo que se mueve entre dos posiciones **A** y **B** empleando para ello un tiempo Δt, se define **potencia media** asociada a dicha fuerza , como:

$$\mathrm{P}_M = \frac{L_{\vec{F}}^{A \to B}}{\Delta t}$$

Asociada al trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}$, aparece un cambio en la energía del sistema de manera tal que:

Para el caso de una fuerza constante reemplazando el trabajo por

$$\mathrm{P}_M = \frac{\Delta E}{\Delta t}$$

su expresión se obtiene:

Si $\vec{F}$ depende de la posición, la expresión correcta para la potencia

$$\mathrm{P}_M = \frac{\vec{F} \bullet \overrightarrow{AB}}{\Delta t} = \frac{\left|\vec{F}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \cos\left(\vec{F}, \overrightarrow{AB}\right)}{\Delta t}$$

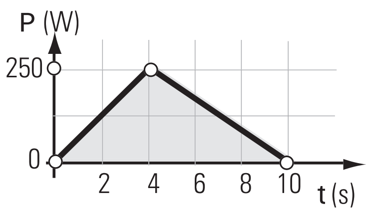
y como: $\left|\overrightarrow{v_M}\right| = \dfrac{\left|\overrightarrow{AB}\right|}{\Delta t}$

$$\Rightarrow \mathrm{P}_M = \left|\vec{F}\right| \cdot \cos\left(\vec{F}, \overrightarrow{AB}\right) . \left|\overrightarrow{v_M}\right|$$

media a lo largo de un camino entre **A** y **B** será:

La **potencia instantánea** suministrada por las fuerzas que hacen

$$\mathrm{P}_M = \frac{\int_{x_A}^{x_B} \vec{F}(x) \bullet d\vec{x}}{\Delta t}$$



Actividad. El gráfico representa la potencia en función del tiempo de un ascensor. ¿Qué representa el área gris bajo la curva? Calcúlela.

trabajo será la derivada de la energía respecto del tiempo:

Es fácil probar que la potencia instantánea desarrollada por una

$$\mathrm{P} = \frac{dE}{dt}$$

determinada fuerza $\vec{F}$ (sea constante o no) que hace cambiar la energía del sistema en una cantidad dE cuando realiza un trabajo infinitesimal a lo largo de un desplazamiento dx, se puede expresar también como el producto escalar de la fuerza $\vec{F}$ en cada instante por la velocidad instantánea:

donde α es el ángulo que, en ese instante, forma la dirección de la

$$\mathrm{P}_{ins} = \frac{dE}{dt} = \frac{\vec{F} \bullet d\vec{x}}{dt} = \frac{\left|\vec{F}\right| . \left|d\vec{x}\right| . \cos\alpha}{dt} = \left|\vec{F}\right| \cdot \left|\vec{v}_{ins}\right| . \cos\alpha$$

fuerza $\vec{F}$ con la velocidad instantánea.

La potencia se mide en **watt** (W= J/s), y es usual emplear su múltiplo, el **kilowatt** (kW). También se emplea otra unidad de potencia, asociada al sistema inglés de medida (libra para la masa, pulgadas para las longitudes, segundos para el tiempo), Se trata del **caballo de potencia (**HP**)** ("horse power"). Ver recuadro de la izquierda.

Actividad: demuestre esta relación sabiendo que 1 libra equivale a 0,454 kg y 1 pulgada a 2,54 cm.

El kilowatthora (kWh), que aparece por ejemplo, en las facturas de electricidad, es una unidad de trabajo (o de energía). Expresa la cantidad la energía entregada en una hora a una tasa de 1 kW.

Actividad: encuentre la relación entre el kilowatt-hora y el joule

Utilizando esta equivalencia podemos estimar qué masa podemos elevar hasta una altura de 30 m (un edificio de 10 pisos) si entregamos una energía de 1 kWh. El resultado (verifíquelo) es que esa energía nos alcanza para subir una masa de aproximadamente...¡12 toneladas!

Ejemplo

Un ascensor cuya masa total es de 1000 kg asciende con una velocidad constante de 1 m/s. Calcular la potencia con que el motor del ascensor le entrega energía suponiendo despreciables todos los rozamientos.

Dado que la velocidad es constante, la fuerza su expresión se obtiene, la fuerza $\vec{F}$ que ejerce el motor sobre el ascensor es igual a su peso. Entonces la potencia media, que en este caso coincide con la potencia instantánea, desarrollada por el motor está dada por

$$\mathrm{P}_{ins} = \mathrm{P}_m = m \cdot g \cdot v \cdot \cos 0° = 10000 N \cdot 1 \, {}^{m}\!/_{s} = 10000 W = 10 kW$$

El mismo problema podría plantearse de otro modo, evaluando el aumento de energía mecánica del ascensor en un dado intervalo de tiempo. Supongamos que en un intervalo Δt el ascensor es elevado una altura h, y dado que la energía cinética no aumenta, el incremento de energía mecánica es sólo de energía potencial. En consecuencia, la potencia de la fuerza $\vec{F}$ será:

$$\mathrm{P}_m = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{m \cdot g \cdot h}{\Delta t} \quad \text{y como} \quad \frac{h}{\Delta t} = v \;\Rightarrow \mathrm{P}_m = m \cdot g \cdot v$$

Obsérvese que este cálculo también serviría para calcular la potencia media si el ascensor no se moviera a velocidad constante sino que partiera y llegara a reposo como suele ser lo habitual cuando se mueve entre dos pisos.

Más adelante veremos que el motor puede entregar energía mecánica al ascensor porque transforma otra forma de energía, la energía eléctrica, en energía mecánica.

Analicemos por último la situación en la que el ascensor estuviese bajando. La potencia desarrollada por el motor tiene signo negativo porque la fuerza ejercida a través del cable por el motor sobre el ascensor tiene sentido contrario al desplazamiento y realiza trabajo negativo. Si la única fuerza que se opone al peso es la fuerza del cable (en la práctica actúan también fuerzas de rozamiento), esta potencia negativa expresa el ritmo con el cual el ascensor pierde energía mecánica.

Caballo de potencia
El caballo de potencia es una unidad utilizada en el Sistema Anglosajón de Unidades. Se denota HP, del término inglés Horse Power, expresión que fue acuñada por James Watt en 1782. Se define como la potencia necesaria para elevar verticalmente a la velocidad de 1 pie/min una masa de 33.000 libras, y equivale a 745,69987158227022 W. Frecuentemente se denomina "Caballo de fuerza", introduciendo un error de concepto al confundir potencia con fuerza.

Caballo de vapor
El caballo de vapor, símbolo CV, es una unidad de potencia. Se define como la potencia necesaria para elevar verticalmente un peso de 75 kilopondios a la velocidad de 1 m/s. Esta unidad se llama así porque se suponía que era la potencia que desarrolla un caballo. Sin embargo, un humano deportista de élite puede llegar a desarrollar potencias de 1 CV en períodos muy cortos.
1 CV = 735,49875 W. En Francia se adopta 735,5 W
1 HP = 745,6987158227022 W
1 HP = 1,0138 CV
1 CV = 0,9863 HP