

## Fluidos reales

Los fluidos reales presentan rozamiento, entre sus partes y contra las paredes de los tubos. A esta característica se la llama *viscosidad*. A consecuencia de la viscosidad, para mantener un caudal constante  $Q$  a través de un tubo, es necesario establecer una diferencia de presión  $\Delta p$  entre los extremos del tubo. Para muchos casos de interés, es aproximadamente cierto que el caudal y la diferencia de presión son proporcionales, lo que se expresa matemáticamente:

$$\Delta p = R_H \cdot Q$$

La constante  $R_H$  se conoce como *resistencia hidrodinámica*. Sus unidades, en el sistema MKS, son  $[R_H] = \text{Pa} \cdot \text{s} / \text{m}^3$ .<sup>[9]</sup>

Esta expresión se conoce como "*ley de Ohm de la hidrodinámica*" porque es similar a la ley que estableció Ohm para circuitos eléctricos.

La resistencia hidrodinámica de un tubo por el que viaja un fluido depende de la viscosidad del fluido y de las características geométricas del tubo, como su longitud y su sección (y no de la diferencia de presión ni del caudal). En el caso de un tubo uniforme de sección circular, la resistencia hidrodinámica viene dada por la *ley de Poiseuille* (válida para flujo laminar, es decir cuando no hay turbulencia) que no demostraremos:

$$R_H = \frac{8 \cdot \eta \cdot L}{\pi \cdot r^4}$$

En esta expresión  $L$  es la longitud del tubo,  $r$  su radio y  $\eta$  es el coeficiente de viscosidad del fluido.

De la expresión anterior se pueden obtener las unidades del coeficiente de viscosidad:

$$[\eta] = \text{Pa} \cdot \text{s}$$

Sin embargo, es más habitual utilizar la unidad *poise* (P): 1P = 0,1 Pa.s, y en particular su submúltiplo, el centipoise (cP) :

$$1 \text{cP} = 0,01 \text{ P} = 0,001 \text{ Pa} \cdot \text{s}$$

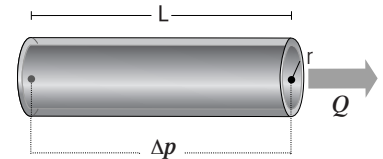
Resulta que, a temperatura ambiente, la viscosidad del agua es de aproximadamente 1 cP.

La validez de la ley de Poiseuille depende de que el flujo sea *laminar*, es decir ordenado de manera que las capas de fluido se deslicen unas sobre otras como las cartas de un mazo al extenderlas. En caso contrario, el flujo se dice *turbulento*<sup>[10]</sup>, la resistencia es mucho mayor que la que se obtiene con la ley de Poiseuille y se debe recurrir a expresiones empíricas para realizar los cálculos.

Una característica llamativa de la ley de Poiseuille es la dependencia de la resistencia hidrodinámica con la cuarta potencia del radio. Esto hace que una pequeña variación porcentual en el radio se amplifique y produzca una variación porcentual mucho mayor en la resistencia hidrodinámica como se ve en el siguiente ejemplo.

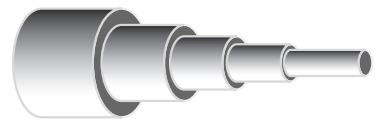
[9]: Esta expresión es válida para un tubo que tenga la entrada a la misma altura que la salida (en caso contrario habría que agregar la diferencia de presión hidrostática debida a la diferencia de nivel) y de sección de entrada igual a la de salida (en caso contrario habría una diferencia de presión adicional relacionada con la diferencia de velocidades). Es útil, por ejemplo, para circuitos cerrados, como en el caso de la resistencia total periférica del sistema circulatorio.

[10]: Respiramos y renovamos el aire incorporado a los pulmones gracias a que el flujo exhalado es turbulento. En caso contrario, moriríamos por asfixia ya que inspiraríamos el mismo aire exhalado.

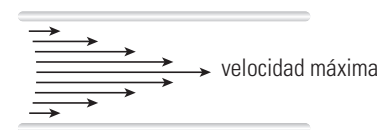


La velocidad de un fluido viscoso en flujo laminar dentro de un tubo es máxima en el centro del tubo y disminuye hacia los bordes. El fluido inmediatamente adyacente a la pared no desliza sobre la misma. Tres maneras de representarlo:

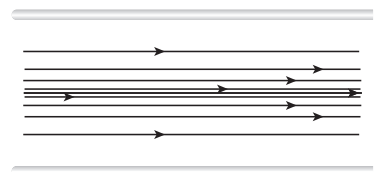
a) Las capas deslizan como tubos concéntricos



b) Perfil de velocidades



c) Líneas de corriente



Las líneas de corriente más próximas entre sí indican que allí la velocidad es mayor.

**Ejemplo**

Encontrar en qué porcentaje aumenta la resistencia hidrodinámica de un vaso sanguíneo cuando su diámetro interior se ve reducido en un 10% por acumulación de sustancias sobre las paredes.

Como resultado de la reducción de grosor, el radio  $r$  pasa a ser  $0,9r$  (el 90% de lo que era antes). De acuerdo con la ley de Poiseuille, la relación entre la resistencia hidrodinámica  $R_{H2}$  y  $R_{H1}$  es:

$$\frac{R_{H2}}{R_{H1}} = \frac{\frac{8 \cdot \eta \cdot L}{\pi \cdot (0,9 \cdot r)^4}}{\frac{8 \cdot \eta \cdot L}{\pi \cdot r^4}} = \frac{r^4}{0,9^4 \cdot r^4} \Rightarrow R_{H2} = 1,52 \cdot R_{H1} .$$

Es decir, que la resistencia hidrodinámica sufre un aumento del 52% ¡con apenas un 10% de reducción en el radio!



A veces se expresa la ley de Poiseuille en términos del área de la sección transversal, en vez del radio. ¿Cuál es su expresión?

$$\cdot \frac{\frac{\tau x}{\tau S} \cdot x}{\tau \cdot x \cdot l \cdot 8} = \frac{\frac{\tau x}{\tau S} \cdot x}{\tau \cdot l \cdot 8} = \frac{\frac{x^2}{S} \cdot x}{\tau \cdot l \cdot 8} = \frac{x^3}{\tau \cdot l \cdot 8} = \eta \gamma$$

**Densidad y Viscosidad** (en un fragmento de *La Caverna* de José Saramago).  
 "...Si lo entiendo bien, dijo Cipriano Algor, los requisitos principales a que debe obedecer la barbotina de relleno son la densidad y la fluidez, Es lo que aquí viene explicado, dijo Marta, Entonces leélo, Sobre la densidad, la ideal es uno coma siete, es decir, un litro de barbotina debe pesar mil setecientos gramos, a falta de un densímetro adecuado si quiere conocer la densidad de su barbotina use una probeta y una balanza, descontando, naturalmente, el peso de la probeta, Y en cuanto a la fluidez úsese un viscosímetro, los hay de varios tipos, cada uno da lecturas asentadas en escalas fundamentadas en diferentes criterios ... En nuestro caso usaremos un método artesanal, empírico e impreciso, pero capaz de dar, con la práctica, una indicación aproximada, Qué método es ése, Hundir la mano profundamente en la barbotina y sacarla, dejando escurrir la barbotina por la mano abierta, la fluidez será dada por buena cuando, al resbalar, forme entre los dedos una membrana como la de los patos,..."

**Densidad y viscosidad, como el agua y el aceite.**

La viscosidad es la magnitud física vinculada con el rozamiento interno de los fluidos. Un líquido es muy viscoso cuando se derrama muy lentamente o cuando presenta mucha resistencia al intentar revolverlo. La miel es un ejemplo de un líquido muy viscoso. En el lenguaje cotidiano no se suele emplear el término "viscoso" y se lo reemplaza por "espeso". Así, se dice que la sopa al enfriarse se vuelve más espesa (viscosa). La viscosidad depende fuertemente de la temperatura: para los gases aumenta con la temperatura y para la mayoría de los líquidos disminuye.

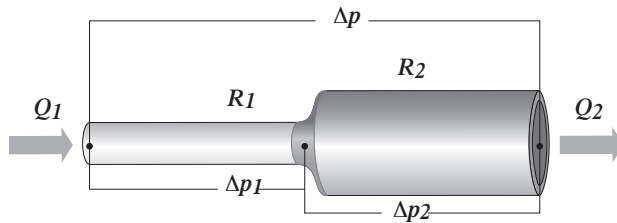
A veces se confunde viscosidad con densidad, aunque son conceptos físicos independientes. Por ejemplo, la sangre es bastante más viscosa que el agua y sin embargo sus densidades son casi iguales. El aceite de cocina es más viscoso que el agua, pero flota en ella, porque la densidad del aceite es inferior a la del agua. En conclusión: la viscosidad es una descripción del rozamiento, mientras que la densidad, la masa por unidad de volumen, se relaciona con la inercia del fluido.

**Asociación de resistencias**

Es habitual conectar tubos que presentan resistencias hidrodinámicas y preguntarse cuál es la resistencia del conjunto formado. A esa resistencia total se la denomina *resistencia equivalente* ( $R_{eq}$ ). Las dos maneras en las que se pueden conectar un par de tubos son en serie y en paralelo.

**Conexión en serie**

En este caso se coloca un tubo de resistencia  $R_1$  y a continuación otro de resistencia  $R_2$ . El fluido atraviesa sucesivamente ambos tubos, por lo que el caudal es el mismo para ambos (no así las diferencias de presiones, que en general son diferentes para ambos tubos).



Conexión de tubos en serie

La ley de Ohm, para cada tubo permite escribir:

$$\Delta P_1 = R_1 \cdot Q \quad \text{y} \quad \Delta P_2 = R_2 \cdot Q \quad (Q = Q_1 = Q_2)$$

que sumadas, miembro a miembro dan:

$$\Delta P = (R_1 + R_2) Q$$

Con lo que concluimos que:

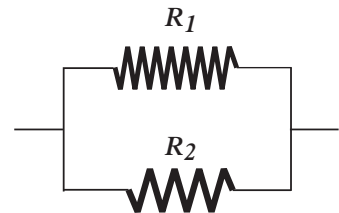
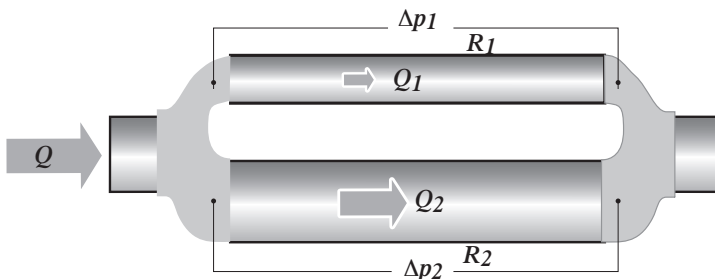
$$R_{eq} = R_1 + R_2$$

Así, la resistencia equivalente de dos tubos conectados en serie es la suma de las resistencias de cada tubo.

Nótese que en la conexión en serie, la resistencia equivalente es mayor que la mayor de las resistencias que se asocian.

### Conexión en paralelo

En este caso las entradas de ambos tubos se conectan al mismo punto y a otro punto se conectan las salidas de ambos tubos. En este caso las diferencias de presión son idénticas para ambos tubos, pero no los caudales.



Conexión de tubos en paralelo

De acuerdo con la ley de Ohm:

$$\Delta P_1 = R_1 \cdot Q_1 \quad \text{y} \quad \Delta P_2 = R_2 \cdot Q_2 \quad (\Delta P_1 = \Delta P_2 = \Delta P)$$

Despejando los caudales:

$$Q_1 = \frac{\Delta P_1}{R_1} \quad \text{y} \quad Q_2 = \frac{\Delta P_2}{R_2}$$

El caudal total es la suma de ambos caudales:

$$Q = Q_1 + Q_2 = \frac{\Delta p}{R_1} + \frac{\Delta p}{R_2} = \Delta p \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

$$\Delta p = \frac{Q}{\left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)}$$

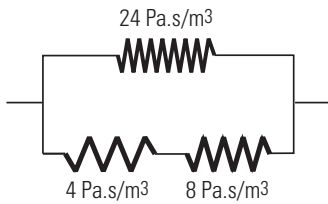
Así, la resistencia equivalente cumple:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

Nótese que en la conexión en paralelo, la resistencia equivalente es menor que la menor de las resistencias que se asocian.

Prohibida la reproducción total o parcial de este material sin el permiso de la cátedra.

**Ejemplo**



Encontrar la resistencia equivalente del sistema formado por dos tubos en serie de resistencias 4 y 8 Pa.s/m<sup>3</sup> y luego en paralelo con otro tubo de resistencia 24 Pa.s/m<sup>3</sup>.

Primero se suman las resistencias en serie, que equivalen a una de 12 Pa.s/m<sup>3</sup>. Luego, esa resistencia está en paralelo con la de 24 Pa.s/m<sup>3</sup>:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \left( \frac{1}{12} + \frac{1}{24} \right) \frac{m^3}{Pa.s} = \frac{1}{8} \frac{m^3}{Pa.s} \Rightarrow R_{eq} = 8 \frac{Pa.s}{m^3} .$$

**Los tres motivos de la diferencia de presión entre dos puntos de un fluido**

Ahora que vimos los cambios de presión entre dos puntos de un fluido en equilibrio, de un fluido ideal en movimiento y de un fluido real podemos, a modo de síntesis, resumir cuáles son las tres causas de la diferencia de presión (en un mismo instante) entre dos puntos de un fluido:

1. **Diferencia de altura.** El punto que se encuentra más abajo está sometido a mayor presión que el que está más arriba. Este efecto se relaciona con la fuerza de gravedad (el peso del fluido).
2. **Diferencia de velocidad.** Como vimos, del teorema de Bernoulli, los puntos del fluido que se mueven con mayor velocidad están sometidos a menor presión que aquellos que se mueven más despacio.
3. **Pérdidas viscosas.** La existencia de la viscosidad hace que el fluido pierda presión en el sentido del flujo. Esto no es otra cosa que la pérdida de energía por fricción.

**Potencia**

El concepto de *potencia*, como trabajo por unidad de tiempo, se puede aplicar a los fluidos, de manera semejante al caso de los cuerpos sólidos. Sin embargo, en el caso de los fluidos, es más útil emplear la diferencia de presión y el caudal en lugar de la fuerza y la velocidad. Si *L* es el trabajo,  $\Delta x$  el desplazamiento,  $\Delta t$  el tiempo empleado, *F* la fuerza, *v* la velocidad, *A* el área de la sección del tubo,  $\Delta p$  la diferencia de presión entre la entrada y la salida, *Q* el caudal y *Pot* la potencia (para no confundir con la presión):

$$Pot = \frac{L}{\Delta t} = \frac{F \cdot \Delta x}{\Delta t} = F \cdot v = \Delta p \cdot A \cdot v = \Delta p \cdot Q .$$

Si  $\Delta p$  se expresa en pascales y *Q* en m<sup>3</sup>/s, la potencia queda en watts. En el caso de un tubo horizontal de sección uniforme, la potencia está asociada con las pérdidas energéticas debidas a la viscosidad, ya que una fuente exterior (una bomba, por ejemplo el corazón) debe reponer la energía que se pierde en forma de calor.

El gráfico muestra la presión manométrica a lo largo del sistema circulatorio. Al principio del recorrido, en la aorta, la presión media es de unos 100 mmHg. A medida que se avanza en el recorrido aorta-arterias-arteriolas-capilares y venas se observa la caída de presión debida a la resistencia del circuito, llegando al sistema venoso con sólo 10 mmHg. En el eje del tiempo se aprecian las oscilaciones de la presión provocadas por el funcionamiento rítmico del corazón y se observa cómo se van amortiguando hasta hacerse inapreciables en los vasos venosos al final del recorrido.

