1._c. Hidrodinámica

La *hidrodinámica* estudia las situaciones en las que los fluidos se mueven. Tiene muchas aplicaciones como la circulación de la sangre, el aparato respiratorio, la natación, el vuelo y la decantación de sustancias, entre otras. Además, se manifiesta en situaciones cotidianas que veremos más adelante.

Caudal

Para un fluido en movimiento, la magnitud física más evidente en la observación directa es el *caudal* (Q), que es el cociente entre el volumen que fluye y el tiempo que demora en fluir. Por ejemplo, si por una canilla salen 10 litros de agua en 5 minutos, diremos que su caudal es:

$$Q = \frac{\text{Volumen}}{\text{Tiempo}} = \frac{10\ lt}{5\ min} = 2\ \frac{lt}{min}\ .$$

El concepto de caudal tiene muchas otras aplicaciones fuera de la física. Así, escuchamos hablar, por ejemplo, de caudal de operaciones bursátiles (N° de operaciones/día) y de caudal de tránsito (N° de vehículos/hora).

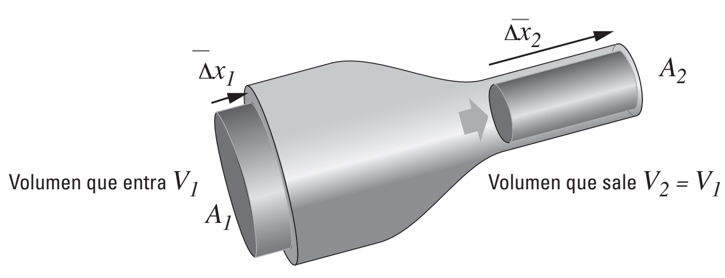
La idea de caudal es especialmente útil para los líquidos porque son prácticamente incompresibles (casi no cambian de volumen). Los gases, en cambio, son muy compresibles y para ellos suele emplearse el caudal de masa o caudal másico, que se diferencia del caudal anterior en que se emplea la masa en lugar del volumen.

Conservación del caudal y ecuación de continuidad

Cuando un líquido se mueve por una cañería rígida y sin pinchaduras que posee tramos de diferente grosor, sin bifurcaciones, la velocidad y la presión del fluido cambian de una parte a otra. Sin embargo, considerando que el líquido es incompresible[5], el caudal en un dado instante tiene que ser el mismo para las diferentes secciones:

$$Q_1 = Q_2\ .$$

Y no podría ser de otro modo: el volumen que entra por un extremo del caño en un lapso pasará por cualquier sección del caño, en ese mismo lapso. Esta igualdad de caudales es conocida como conservación del caudal.



El caudal se relaciona fácilmente con la velocidad [6] v del líquido y el área A de la sección transversal:

$$Q = \frac{V}{\Delta t} = \frac{A \cdot \Delta x}{\Delta t} = A \cdot v\ .$$

[5] La densidad es constante e independiente de la posición y del tiempo

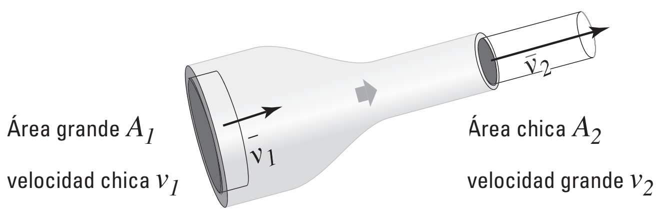
[6] La velocidad a la que nos referimos es la velocidad media en la sección considerada. En la práctica, la fricción del fluido hace que sea más veloz en el centro del tubo, e incluso puede haber turbulencias.

Podemos ver que esta relación es correcta en unidades:
[Q] = m^3/seg; [v] = m/seg y [A] = m^2.

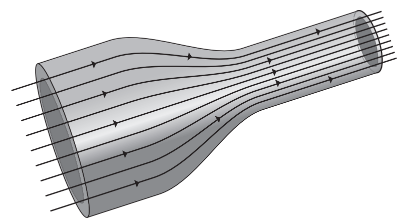
Esta relación nos muestra que la velocidad y el área son inversamente proporcionales: a <u>menor</u> área, <u>mayor</u> velocidad; por ejemplo, si el área se duplica, la velocidad se hace la mitad. Una muestra de este resultado es que el agua que cae por un embudo lo hace con menor velocidad en la parte ancha que en la parte angosta.

Así, el líquido que pasa por secciones relativamente estrechas lo hace con mayor velocidad que por las secciones más amplias, porque es la única manera de que el mismo volumen pase por ambas secciones en iguales tiempos. Combinando este resultado con la conservación del caudal, obtenemos la *ecuación de continuidad* [7]:

$$\boxed{A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2}$$



El líquido está en *régimen estacionario* si en cualquier punto del caño observamos que las sucesivas partículas que van pasando lo hacen siempre con la misma velocidad. En este caso, se puede hacer un mapa trazando las trayectorias de las distintas partículas de fluido. Estas curvas, que no cambian en el tiempo, se llaman *líneas de corriente*. La velocidad del fluido en cada punto es tangente a las líneas de corriente y de su mismo sentido. En un tubo que cambia de sección, veremos que en las partes estrechas, donde la velocidad es mayor, las líneas de corriente están más próximas entre sí que en las partes amplias, donde las velocidades son menores.



Las **líneas de corriente** están más juntas en los tramos más estrechos del tubo donde la velocidad es mayor.

Ejemplo

Un líquido se mueve por una cañería sin bifurcación. En un tramo de 4 cm^2 de sección fluye a 6 cm/seg. ¿Con qué velocidad atraviesa un tramo de 3 cm^2 de sección?

Solución:

Aplicando la ecuación de continuidad:

$$v_2 = \frac{A_1 \cdot v_1}{A_2} = \frac{4\ cm^2 . 6\ \frac{cm}{s}}{3\ cm^2} = 8\ \frac{cm}{s}\ .$$

¡eh? ¿eh? ¡eh?

Si el líquido que se mueve por el tubo es muy espeso, como por ejemplo el dulce de leche, ¿seguirá siendo cierto que el caudal entrante al tubo es igual al saliente? ¿Vale en ese caso la ecuación de continuidad?

Sí, vale. Es imposible que en un dado instante pasen más metros cúbicos por hora por una parte del caño que por otra. ¡Crearíamos dulce de leche! ¡O lo haríamos desaparecer! Naturalmente, estamos suponiendo que todo el caño está lleno de líquido, sin partes vacías ni llenas de aire u otro fluido compresible.

[7] Recordemos que sólo vale para fluidos incompresibles como son, aproximadamente, los líquidos.

Relación entre velocidad y presión

El efecto del movimiento de los fluidos sobre su presión se puede notar en muchas situaciones de la vida diaria. Para comprobarlo realicemos la siguiente experiencia.

Experiencia. Tomemos una hoja de papel y doblémosla por la mitad de manera de formar una letra "V". Luego tomemos la hoja por la línea del doblez y démosle un soplido fuerte que la atraviese por el interior de la "V". ¿Qué les parece que ocurrirá? ¿La "V" se abrirá o se cerrará?

Compruébenlo. ¿Qué sugiere el resultado de esta experiencia sobre la relación velocidad–presión?

El resultado de la experiencia anterior es bastante sorprendente: aunque la intuición parece sugerirnos que las dos patas de la "V" se separarán, lo que ocurre es que se juntan aún más. Esto sugiere que al soplar (o sea al aumentar la velocidad del aire interior) la presión interior disminuye y por eso predomina la presión exterior del aire quieto y la "V" se cierra. Rendidos ante la evidencia experimental, concluimos que, al menos en este caso:

La presión de un fluido es menor donde mayor es su velocidad.

Otras observaciones que apoyan la correlación inversa entre velocidad y presión (v↑ p↓):

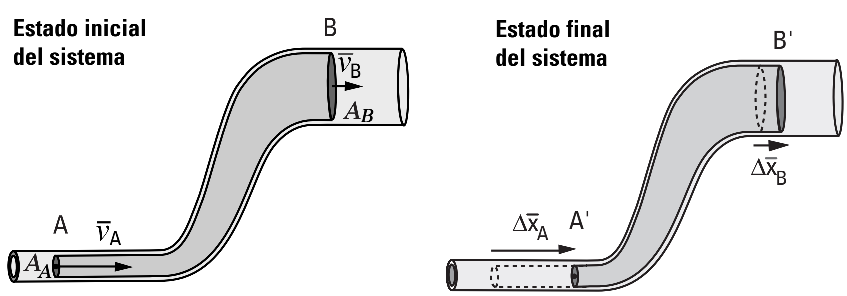
* En días muy ventosos, los techos de chapa horizontales de algunas viviendas precarias son arrancados hacia arriba por la diferencia de presión entre la parte inferior de la chapa (aire quieto, alta presión) y la parte superior (aire en movimiento, baja presión).

* Al tomar una ducha, la cortina de baño suele embolsarse hacia adentro. El agua arrastra aire y baja la presión del lado de la ducha.

Teorema de Bernoulli

Este teorema establece la relación entre la velocidad de un fluido y su presión y hace participar, además, a los cambios de altura. En realidad, no es otra cosa que la expresión de la conservación de la energía. Para demostrar el *teorema de Bernoulli* se deben cumplir algunas condiciones. El fluido debe carecer de viscosidad (sin rozamiento) y ser incompresible (densidad constante); el flujo debe ser estacionario (el caudal no cambia con el tiempo) e irrotacional (no se forman remolinos; si ponemos una hélice en el fluido no se pone a girar).

Apliquemos el teorema del trabajo y la energía al fluido sombreado contenido entre los puntos A y B de la figura. Después de un breve intervalo Δt nuestro sistema se habrá movido a lo largo del tubo hasta ocupar el espacio entre A' y B'.



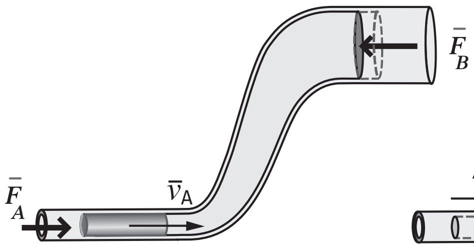
¿Cuál es el trabajo de las fuerzas que actúan en ese intervalo? Calculemos el trabajo de las fuerzas aplicadas por el resto del fluido, que operan sobre el extremo izquierdo y el derecho del sistema.

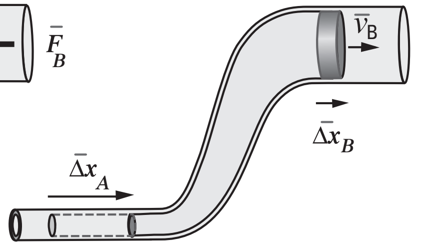
Trabajo que hace el fluido que continúa a nuestro sistema por la izquierda:

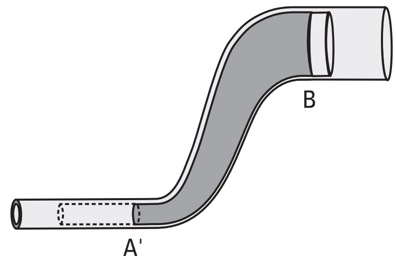
$$L_{F_A} = F_A \cdot \Delta x_A = p_A \cdot A_A \cdot \Delta x_A$$
$$L_{F_A} = p_A \cdot V_A \; .$$

Trabajo que hace el fluido que precede a nuestro sistema en la tubería :

$$L_{F_B} = -F_B \cdot \Delta x_B = -p_B \cdot A_B \cdot \Delta x_B$$
$$L_{F_B} = -p_B \cdot V_B \; .$$







La región sombreada (entre A´ y B), luego de transcurrido Δt, es ocupada por una porción de fluido que antes no estaba allí. Sin embargo, las condiciones físicas de su estado (posición, velocidad y presión) son las mismas que las de la porción de fluido que inicialmente ocupaba esa región. Es por eso, que la varición neta sobre el sistema entre el estado inicial y el final equivale a elevar el volumen V desde A hasta B.

Mientras el fluido se mueve por el tubo, la variación neta sobre el sistema equivale a elevar el volumen de líquido sombreado en A, que se mueve con velocidad v_A, hasta el punto B, donde la velocidad es v_B.

Ambos trabajos sumados al del peso equivalen a la variación de la energía cinética (se desprecia aquí a las fuerzas viscosas):

$$L_{F_A} + L_{F_B} + L_P = \Delta Ec$$
$$p_A \cdot V_A - p_B \cdot V_B = \Delta Ec + \Delta Ep_G$$
$$\left(p_A - p_B\right) \cdot V = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_B^{\,2} - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_A^{\,2} + m \cdot g \cdot h_B - m \cdot g \cdot h_A \quad ,$$

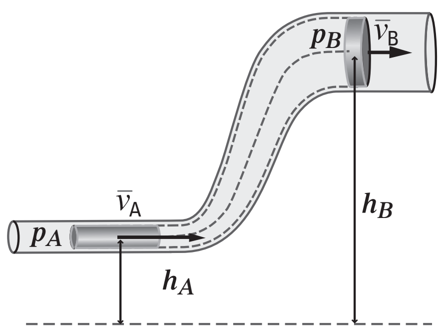
donde m es la masa del elemento de volumen V $(V = V_A = V_B)$.

Dividiendo por V: $$p_A - p_B = \frac{1}{2} \cdot \delta \cdot v_B^{\,2} - \frac{1}{2} \cdot \delta \cdot v_A^{\,2} + \delta \cdot g \cdot h_B - \delta \cdot g \cdot h_A$$

$$p_A + \frac{1}{2} \cdot \delta \cdot v_A^{\,2} + \delta \cdot g \cdot h_A = p_B + \frac{1}{2} \cdot \delta \cdot v_B^{\,2} + \delta \cdot g \cdot h_B \quad .$$

Como los puntos A y B son dos puntos cualesquiera sobre una línea de corriente, la conclusión es el *teorema de Bernoulli*:

$p + \frac{1}{2} \cdot \delta \cdot v^2 + \delta \cdot g \cdot h$	tiene el mismo valor para cualquier punto del tubo[8].



Es decir que, en general, en diferentes puntos hay diferentes valores de p, v y h, pero la suma que aparece en la última expresión es igual para todos los puntos a lo largo de una línea de corriente.

[8] A veces se afirma que la suma de estos tres términos es "constante". Sin embargo, el teorema dice que esa suma toma el mismo valor en diferentes puntos del espacio y no a través del tiempo: en otro momento la suma podría cambiar de valor y ese nuevo valor sería el mismo en cualquier lugar del tubo.

Cuando el fluido está en reposo, obtenemos:

$$p_A - p_B = \delta \cdot g \cdot \left(h_B - h_A\right) \ ,$$

que no es otro que el *Teorema fundamental de la hidrostática.*

Ejemplo

Por un caño horizontal de sección variable fluye agua. A la entrada del caño la velocidad del agua es de 1 m/s. ¿Cúal es la diferencia de presión entre la entrada y la salida del caño si el radio a la salida es la mitad que en la entrada? Consideramos despreciable la viscosidad del agua.

Como el tubo es horizontal:

$$p_E + \frac{1}{2} \cdot \delta \cdot {v_E}^2 + \cancel{\delta \cdot g \cdot h_E} = p_S + \frac{1}{2} \cdot \delta \cdot {v_S}^2 + \cancel{\delta \cdot g \cdot h_S} \ ,$$

de dónde deducimos que la presión en la entrada debe ser mayor que en la salida porque la velocidad en la entrada es menor, como se desprende de la ecuación de continuidad:

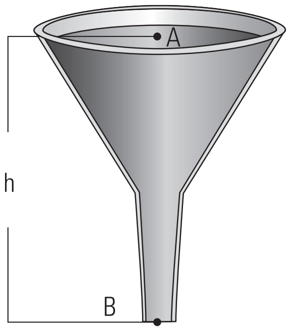
$$v_E \cdot A_E = v_S \cdot A_S \Rightarrow v_S = \frac{v_E \cdot A_E}{A_S} = \frac{v_E \cdot \cancel{\pi} \cdot r_E^2}{\cancel{\pi} \cdot r_S^2} = \frac{v_E \cdot \cancel{r_E^2}}{\frac{\cancel{r_E^2}}{4}} = 4 v_E$$

$$p_E - p_S = \frac{1}{2} \cdot \delta \cdot {v_S}^2 - \frac{1}{2} \cdot \delta \cdot {v_E}^2 = \frac{1}{2} \cdot \delta \left(\left(4 v_E\right)^2 - {v_E}^2 \right)$$

$$p_E - p_S = \frac{1}{2} \cdot \delta \left(16 {v_E}^2 - {v_E}^2\right) = \frac{15}{2} \cdot 1000 \frac{kg}{m^3} \cdot \left(1 \frac{m}{s}\right)^2 = 7500 Pa \ .$$

Ejemplo

Un embudo vertical de 20 cm de largo tiene 10 cm^2 de sección en su boca superior y 2 cm^2 en su extremo inferior. Si se lo mantiene lleno con agua, ¿con qué velocidad sale el agua por abajo?



Si aplicamos la ecuación de Bernoulli entre el extremo de entrada del agua (A) y el de salida (B):

$$p_A + \frac{1}{2} \cdot \delta \cdot {v_A}^2 + \delta \cdot g \cdot h_A = p_B + \frac{1}{2} \cdot \delta \cdot {v_B}^2 + \delta \cdot g \cdot h_B$$

Las presiones p_A y p_B son iguales a la presión atmosférica, porque ambos puntos están en contacto con el aire. La altura h_B puede ser considerada igual a cero, con lo que $h_A = h = 20$ cm. Además las velocidades se pueden relacionar a través de la ecuación de continuidad:

$$v_A \cdot A_A = v_B \cdot A_B \quad \text{, de donde :} \quad v_A = \frac{v_B \cdot A_B}{A_A} \ .$$

Entonces, después de algunas manipulaciones algebraicas:

$$\cancel{p_A} + \frac{1}{2} \cdot \delta \cdot \left(\frac{v_B \cdot A_B}{A_A} \right)^2 + \delta \cdot g \cdot h_A = \cancel{p_B} + \frac{1}{2} \cdot \delta \cdot {v_B}^2 + 0$$

$$\frac{1}{2} {v_B}^2 \left(1 - \left(\frac{A_B}{A_A} \right)^2 \right) = g \cdot h_A \Rightarrow v_B = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot h_A}{1 - \left(\frac{A_B}{A_A} \right)^2}} = 2{,}04 \frac{m}{s} \ .$$

Nótese que si se hubiese despreciado la velocidad v_A (tomando v_A= 0), el resultado aproximado (2 m/s) no hubiera sido muy diferente.