# Física e Introducción a la Biofísica

## Ciclo Básico Común – Universidad de Buenos Aires

## <u>Notas Teóricas de la Clase 3 (*)</u>

## Cinemática: Movimientos Verticales Libres

(*) Las notas que figuran a continuación fueron redactadas originalmente por Carmelo Randazzo, y corregidas y re-editadas por Cristian Rueda.

### CAÍDA LIBRE Y TIRO VERTICAL

Todos sabemos que si soltamos un objeto desde una terraza este caerá desplazándose hacia abajo con rapidez creciente. Si despreciamos la resistencia ofrecida por el aire en este movimiento, todos los cuerpos en esta situación, llamada *caída libre*, tendrán la misma aceleración que es la aceleración gravitatoria, causada por la atracción terrestre, y que tiene las siguientes características:

- Dirección vertical
- Sentido hacia abajo (en realidad debemos decir orientada hacia el centro de la Tierra).
- Un valor o módulo de unos 9,8 m/s$^2$

El hecho de que las hojas de los árboles no caigan como lo hace una piedra sino que lo hagan con una aceleración menor se debe en realidad al efecto de la resistencia del aire, que incluso limita la velocidad máxima que puede alcanzar cualquier cuerpo en caída, modificando la aceleración a medida que la velocidad aumenta.

Abordaremos las causas de este fenómeno con mayor profundidad cuando veamos dinámica, por el momento sólo nos interesará saber que el movimiento de caída libre está determinado por la aceleración de la gravedad **(g)**, de valor **<u>constante</u>** en todos los casos que veremos, de modo que se trata de un caso particular de MRUV. De esta manera adoptaremos como siempre un sistema de referencia conveniente (denominando al eje como ***y*** en vez de ***x*** ya que en la mayoría de los textos se utiliza esta nomenclatura) y estableceremos las funciones de posición y velocidad respecto del tiempo como vimos en la clase anterior. En general vamos a aproximar el valor del módulo de la gravedad a **10 m/s$^2$.**

Notar que si estos movimientos tienen aceleración constante, entonces simplemente se tratarán de MRUV como los ya estudiados en la clase anterior. Para estos casos particulares, las ecuaciones horarias quedarán:

$$\boxed{v(t) = v_0 + g \cdot (t - t_0)} \qquad \boxed{y(t) = y_0 + v_0 \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} \cdot g \cdot (t - t_0)^2}$$

### Signo de g

Como ya hemos dicho, la aceleración de la gravedad siempre apunta hacia abajo, y a la hora de realizar cálculos, esto se manifiesta a través de un signo **<u>que no dependerá de lo que haga el cuerpo, sino del sistema de referencia que nosotros elijamos</u>** para resolver el problema.

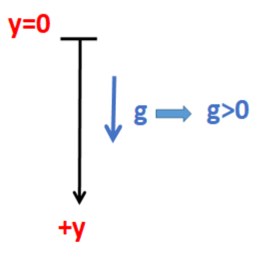



**Figura 1**

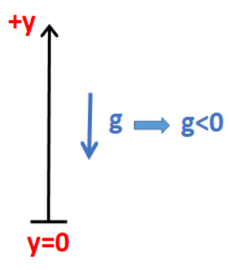



**Figura 2**

Si consideramos un origen arbitrario del sistema de referencia (y = 0), y apuntamos el eje y positivo hacia abajo (figura 1), la gravedad será considerada positiva ya que apunta en el mismo sentido que el sistema de referencia. En cambio, si eligiéramos un sistema de referencia positivo hacia arriba (figura 2), la gravedad apunta en sentido contrario y por lo tanto será negativa.

Cabe aclarar que la elección del origen y sentido del sistema de referencia es una elección arbitraria, pero **no se cambia** en el medio de una resolución de un problema. De esta forma, el signo de g no cambiará en ningún instante: será siempre positiva (si el eje positivo apunta hacia abajo) o será siempre negativa (si el eje positivo apunta hacia arriba).

Analicemos breve y cuantitativamente un *tiro vertical*: Si arrojamos un objeto hacia arriba vemos que su rapidez disminuye hasta alcanzar su altura máxima, instante en el cual el cuerpo se detiene y comenzará a caer aumentando su rapidez. Si para todo el movimiento tomáramos un sistema de referencia con origen en el punto de lanzamiento y positivo hacia arriba, la velocidad será positiva y la aceleración gravitatoria actuante hacia abajo, tendrá signo negativo de acuerdo a la referencia elegida, disminuyendo la rapidez del cuerpo desde el valor inicial hasta anularla en la altura máxima. A partir de allí la velocidad empieza a aumentar en módulo, pero ahora tomando valores negativos porque el cuerpo estará bajando (recordemos que nuestro sistema de referencia apunta ***siempre*** hacia arriba definiendo ese sentido como positivo).

Notar que el movimiento de ascenso es de frenado (pues la velocidad y la aceleración tienen signos opuestos), mientras que el movimiento de descenso es acelerado (pues la velocidad y la aceleración tienen igual signo).

**Ejemplo 1:** *Se deja caer libremente un objeto desde una altura de 125 m sobre el nivel del piso.*

*a) Escribir las ecuaciones horarias.*

*b) Calcular su velocidad y altura a los 2 segundos de caer*

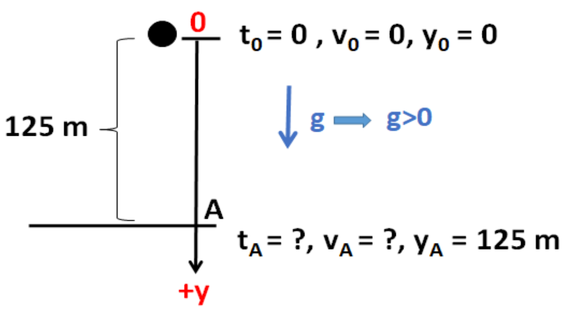
*c) Determinar cuanto tarda en tocar el piso*

*d) ¿Qué velocidad tiene al impactarlo?*

*e) Realiza las gráficas de y(t) y v(t).*

Resolvamos el ejercicio de dos formas distintas:

1) Con un sistema de referencia con origen en el punto donde se deja caer, y positivo hacia abajo:




**a)** Definamos primero t0 = 0. Al elegir un eje vertical *y* con sentido positivo hacia abajo y cuyo origen coincide con la posición inicial del objeto, se tiene que y0 = 0, y g = +10m/s$^2$. Además, $v_0 = 0$ ya que el enunciado dice que se lo deja caer. Entonces, al armar las ecuaciones horarias, se tiene que:

$$v(t) = v_0 + g \cdot (t - t_0) \Rightarrow \boxed{v(t) = 10\frac{m}{s^2} \cdot t}$$

$$y(t) = y_0 + v_0 \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} \cdot g \cdot (t - t_0)^2 \Rightarrow \boxed{y(t) = 5\frac{m}{s^2} \cdot t^2}$$

Observar que la primera ecuación arrojará valores positivos para todo t > 0. Esto es coherente ya que el móvil desciende (entonces, la velocidad apunta hacia abajo, a favor del sistema de referencia elegido). Además, en todo instante, v y g tienen igual signo, con lo que el cuerpo al caer acelera.

Por último, notar que la segunda ecuación **no da la altura del objeto**, sino la distancia recorrida por el cuerpo en su caída libre respecto del punto de partida.

**b)** Para conocer la velocidad alcanzada luego de 2 segundos de caída libre reemplazamos este valor del tiempo en la ecuación v(t):

$$v(2s) = 10\frac{m}{s^2} \cdot 2s = 20\frac{m}{s}$$

Si ahora queremos conocer a qué altura (sobre el piso) se encuentra el objeto en esos dos segundos, primero calculamos la distancia que ha caído reemplazando el valor de t por los 2 s en y(t):

$$y(2s) = 5\frac{m}{s^2} \cdot (2s)^2 = 20\,m$$

Para saber a que altura se encuentra le restamos a la altura inicial (de 125 m) la distancia que ha recorrido en esos 2 seg resultando:

$$h = 125 \text{ m} - 120 \text{ m} = 105 \text{ m}$$

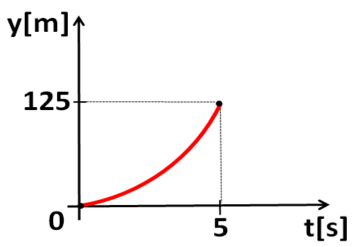
**c)** Si consideramos que el cuerpo ha llegado al piso (punto A) entonces conocemos la distancia que ha recorrido (125 m). Si este valor lo reemplazamos en y(t) podemos despejar el tiempo que ha tardado en recorrerlos:

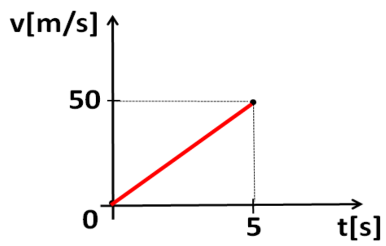
$$125m = 5\frac{m}{s^2} \cdot t_A{}^2 \Rightarrow t_A{}^2 = \frac{125m}{5\frac{m}{s^2}} \Rightarrow t_A = \sqrt{25s^2} = 5s$$

**d)** Para conocer con qué velocidad llegó al piso reemplazamos los 5 s que tardó en v(t):

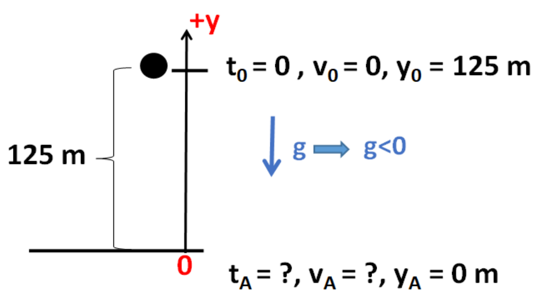
$$v(5s) = 10\frac{m}{s^2} \cdot 5s = 50\frac{m}{s}$$

**e)** Realizaremos las gráficas de y(t) y v(t) considerando que $v_0 = 0$ y que es un MRUV con aceleración positiva:




2) Ahora tomemos un sistema de referencia con origen en el piso y positivo hacia arriba:




En este caso, si definimos t0 = 0 al instante en que parte el cuerpo, su posición y0 = 125 m (está a 125 m del origen de coordenadas).Y como g apunta en sentido opuesto al sistema de referencia, entonces $g = -10$ m/s$^2$.

Las ecuaciones horarias, entonces, quedarían:

$$v(t) = v_0 + g \cdot (t - t_0) \Rightarrow \boxed{v(t) = -10\frac{m}{s^2} \cdot t}$$

$$y(t) = y_0 + v_0 \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} \cdot g \cdot (t - t_0)^2 \Rightarrow \boxed{y(t) = 125m - 5\frac{m}{s^2} \cdot t^2}$$

Observar que la primera ecuación arrojará valores negativos para todo t > 0. Esto es coherente ya que el móvil desciende (entonces, la velocidad apunta hacia abajo, en contra del sistema de referencia elegido). Además, en todo instante, v y g tienen igual signo, con lo que el cuerpo al caer acelera.

Por último, notar que la segunda ecuación **si da la altura del objeto**, y no la distancia recorrida por el cuerpo desde la partida (cuidado).

A partir de las ecuaciones horarias, desarrolle el ejercicio y cerciórese que los resultados sean los mismos que habíamos obtenido antes. En este caso, el punto A sería cuando el cuerpo llega al origen de coordenadas (y = 0)…

**Ejemplo 2:** *Un cuerpo se lanza verticalmente hacia arriba con una velocidad de 50 m/s desde el nivel del piso:*

*a) Escribir las ecuaciones horarias.*

*b) Calcular su velocidad y altura a los 2 segundos*

*c) Idem a los 8 segundos.*

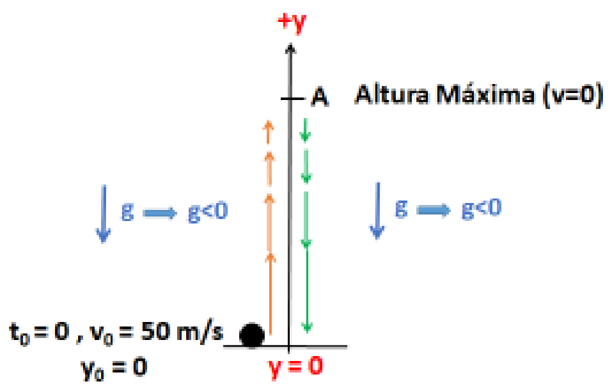
*d) ¿Cuánto tarda en alcanzar la altura máxima? ¿Cuál es el valor de dicha altura?*

*e) Determinar cuánto tarda en tocar el piso.*

*f) ¿Qué velocidad tiene al impactarlo?*

*g) Realiza las gráficas de y(t) y v(t).*

**a)** Realicemos el esquema de la situación, y establezcamos claramente el sistema de referencia:




Considerando que $t_0=0$, y que en dicho instante, $y_0=0$, $v_0=50$ m/s (positivo, porque en el instante inicial parte hacia el sentido positivo del eje y), y $g = -10\ m/s^2$ (negativo en todo instante ya que apunta en sentido opuesto al sistema de referencia), se tiene que:

$$v(t) = v_0 + g \cdot (t - t_0) \Rightarrow \boxed{v(t) = 50\frac{m}{s} - 10\frac{m}{s^2} \cdot t}$$

$$y(t) = y_0 + v_0 \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} \cdot g \cdot (t - t_0)^2 \Rightarrow \boxed{y(t) = 50\frac{m}{s} \cdot t - 5\frac{m}{s^2} \cdot t^2}$$

**b)** Para responder esta pregunta (y la siguiente) simplemente reemplazamos la variable t por el valor correspondiente:

$$v(2s) = 50\frac{m}{s} - 10\frac{m}{s^2} \cdot 2s = 30\frac{m}{s} \qquad y(2s) = 50\frac{m}{s} \cdot 2s - 5\frac{m}{s^2} \cdot (2s)^2 = 80m$$

**c)**
$$v(8s) = 50\frac{m}{s} - 10\frac{m}{s^2} \cdot 8s = -30\frac{m}{s} \qquad y(8s) = 50\frac{m}{s} \cdot 8s - 5\frac{m}{s^2} \cdot (8s)^2 = 80m$$

Es importante interpretar estos resultados. Según nuestros cálculos, el cuerpo estará a una altura de 80 m en dos ocasiones: a los 2 segundos de haber sido arrojado hacia arriba y luego a los 8 segundos (también después de haber sido arrojados). Ocurre que en este lapso de tiempo el cuerpo alcanza la altura máxima pasando por los 80 m de altura al subir y luego regresando al bajar. Notemos que en la primer situación el móvil tiene velocidad positiva (lo cual de acuerdo al sistema referencial elegido indica que está ascendiendo) y en la segunda pasada su velocidad es negativa.

**d)** El cuerpo asciende disminuyendo progresivamente su velocidad hasta que esta se anula. En ese instante habrá alcanzado su máxima altura (en la figura, ese punto es A) y comenzará a caer. Por lo tanto reemplazamos v(t) por 0 y despejamos t:

$$0 = 50\frac{m}{s} - 10\frac{m}{s^2} \cdot t_A \Rightarrow t_A = 5s$$

Para calcular la altura máxima tenemos que calcular la posición y(t) a los 5 segundos

$$h_{max} = y(5s) = 50\frac{m}{s} \cdot 5s - 5\frac{m}{s^2} \cdot (5s)^2 = 125m$$

**e) y f)** Dado que la aceleración en la subida es la misma que en la bajada y que el desplazamiento es el mismo podemos responder teóricamente que si tarda 5 segundos en subir, tardará otros 5 segundos en bajar de modo que volverá al piso luego de los 10 segundos de haber partido con una velocidad del mismo módulo pero de sentido contrario, o sea que llegará con una velocidad de -50 m/s. ¡Cuidado! Este argumento de simetría es válido si el cuerpo va y vuelve al punto de partida.

Para resolverlo analíticamente consideremos que la posición referente al piso coincide con la coordenada 0 de nuestro eje de referencia de modo que podemos reemplazar y(t) por 0 y de allí despejar t de la ecuación de segundo grado resultante:

$$0 = 50\frac{m}{s} \cdot t - 5\frac{m}{s^2} \cdot t^2 \Rightarrow t = 0 \quad \text{o bien} \quad t = 10s$$

Como t = 0 s corresponde al instante inicial, llegará al piso en t = 10 s. Reemplazando en v(t) conocemos la velocidad de llegada:

$$v(10s) = 50\frac{m}{s} - 10\frac{m}{s^2} \cdot 10s = -50\frac{m}{s}$$

**g)** Sabemos que se trata de un MRUV con aceleración negativa y velocidad inicial positiva. Esta se anula a los 5 segundos en donde el cuerpo alcanza su altura máxima y 5 segundos después toca el suelo con una velocidad de –50 m/s: