Física e Introducción a la Biofísica

Ciclo Básico Común – Universidad de Buenos Aires

<u>Notas Teóricas de la Clase 2 (*)</u>

Cinemática: Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado.

(*) Las notas que figuran a continuación fueron redactadas originalmente por Carmelo Randazzo, y corregidas y re-editadas por Cristian Rueda.

Aceleración

Es habitual que en el transcurso de su movimiento un cuerpo cambie su velocidad instante a instante. Puede cambiar el valor, dirección o ambas cosas a la vez. Estos cambios de velocidad ocurren durante un intervalo de tiempo, no instantáneamente. Cuanto menor sea este intervalo más brusco será el cambio en el movimiento. Existe una magnitud que mide esta intensidad en el cambio de velocidad y se denomina **aceleración media (a_m)**, definiéndose como el cociente entre la variación de la velocidad y el tiempo que éste demande. Así:

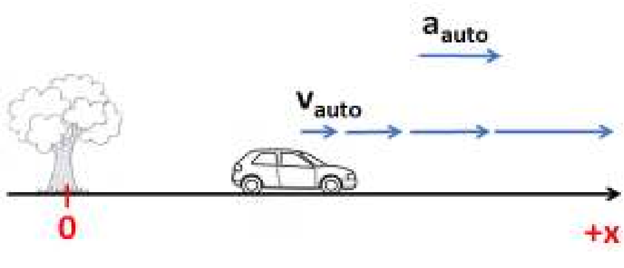
$$\boxed{a := \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_f - v_0}{t_f - t_0}}$$

Estudiaremos un movimiento de dirección rectilínea en el cual la velocidad cambia su valor en forma lineal, registrándose en iguales intervalos de tiempo iguales cambios de velocidad. De esta forma su razón o cociente es siempre el mismo, resultando la aceleración media una constante (y por lo tanto, llamada simplemente aceleración). El movimiento resultante se llama **movimiento rectilíneo uniformemente variado** (**MRUV**) pues la velocidad varía uniformemente con el tiempo. En estos casos, el módulo de la velocidad puede aumentar o disminuir.

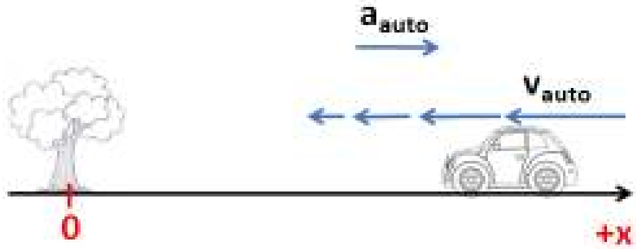
¿En qué casos el módulo aumenta y en qué casos disminuye? Así como la velocidad es una magnitud vectorial, la aceleración también lo es, y por lo tanto, tiene una dirección, sentido y módulo. En los movimientos que estudiamos nosotros (los rectilíneos) la aceleración tiene la misma dirección que la trayectoria. Para indicar que un móvil aumenta el módulo de su velocidad (acelera) o si lo disminuye (frena), diremos que:

- *Si el vector aceleración tiene el mismo sentido que el vector velocidad (es decir, velocidad y aceleración tienen igual signo), entonces el móvil ACELERA*
- *Si el vector aceleración tiene sentido opuesto al del vector velocidad (es decir, velocidad y aceleración tienen signos opuestos), entonces el móvil FRENA*

En la siguiente figura se muestra un móvil que se desplaza hacia la derecha (sentido positivo del movimiento, por lo tanto, con velocidad positiva), aumentando el módulo de su velocidad (las flechas de distinto tamaño denotan el vector velocidad en distintos instantes mientras avanza). Esto se debe a que el vector aceleración apunta en el mismo sentido que la velocidad. En este caso, sucede entonces que v > 0 y a > 0.



¿Es verdad que siempre que un móvil tiene aceleración positiva, el móvil acelera? No. Supongamos que tenemos un móvil que se desplaza en el sentido contrario al sistema de referencia, y frenando:



En este caso, el móvil se desplaza con velocidad negativa, y para lograr frenar, la aceleración debe apuntar en <u>sentido contrario a la velocidad.</u> Por lo tanto, en este caso el móvil frena con aceleración positiva (de hecho, $v < 0$ y $a > 0$).

Por lo tanto, recuerde entonces que si un móvil acelera o frena **no** es consecuencia del signo de la aceleración, sino de <u>la relación de signos entre velocidad y aceleración.</u>

Velocidad instantánea

Si despejamos de la expresión de aceleración el valor de la velocidad final obtendremos una relación entre dicho valor y el instante t_f que se le corresponde:

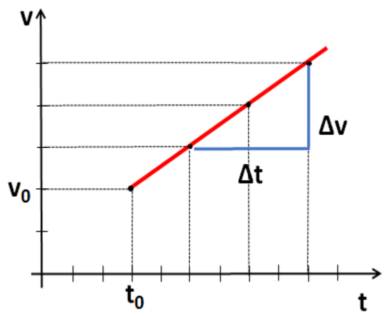
$$a = \frac{v_f - v_0}{t_f - t_0} \Rightarrow a \cdot (t_f - t_0) = v_f - v_0 \Rightarrow v_f = v_0 + a \cdot (t_f - t_0)$$

Si expresamos la velocidad v como una variable que depende del tiempo t, obtenemos la **ecuación horaria de velocidad en función del tiempo para un MRUV:**

$$\boxed{v(t) = v_0 + a \cdot (t - t_0)}$$

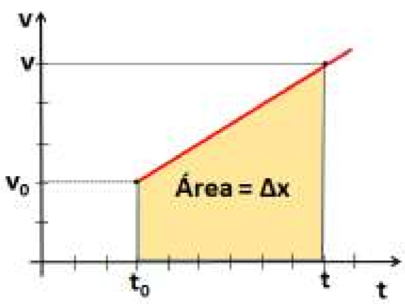
donde a, v_0 y t_0 son números fijos que no cambian con el tiempo. Los valores t_0 y v_0 son llamados en general condiciones iniciales, pero como ya vimos, pueden ser cualquier par de valores que se correspondan entre sí.

La figura nos muestra el gráfico correspondiente a un objeto que se mueve con MRUV de aceleración *positiva*. Como la aceleración es constante el gráfico resulta ser el de una recta **cuya pendiente es justamente la aceleración.**



Ecuación horaria de la posición

Vimos que en un gráfico velocidad-tiempo el área delimitada por dos coordenadas de tiempo representaba el desplazamiento del móvil en dicho lapso. De allí puede deducirse la ecuación horaria de la posición en función del tiempo en un MRUV (lo dejamos como ejercicio).

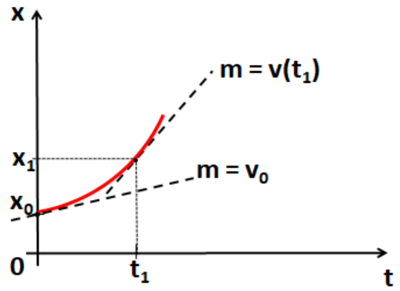


Tomando como condiciones iniciales t_0 y v_0 y tomando arbitrariamente un instante t (genérico) y el valor correspondiente de su velocidad v, al calcular el área encerrada como muestra la figura se obtiene una **ecuación horaria de posición del MRUV**, cuya forma funcional es:

$$\boxed{x(t) = x_0 + v_0 \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} \cdot a \cdot (t - t_0)^2}$$

Esta expresión establece una relación entre la posición del cuerpo y el instante de tiempo t. Vemos que es una función de segundo grado cuya representación gráfica es la de una parábola.

En el gráfico posición-tiempo x(t) dibujado abajo, a modo de ejemplo, la parábola es cóncava, es decir, un MRUV con aceleración positiva (recordemos de matemática que si el signo del término de segundo grado es positivo la parábola es cóncava hacia arriba, y si es negativo la parábola es cóncava hacia abajo).



Ahora analicemos como observar en este gráfico el comportamiento de la velocidad. Cuando vimos MRU, cuya gráfica x(t) era la de una recta, la velocidad estaba representaba por la pendiente (o sea la "inclinación") de dicha recta. En el caso de una curva, como es en este caso el de la parábola, podemos imaginarla compuesta de una serie continua de **rectas tangentes, cuya pendiente representará efectivamente a la velocidad en cada instante.**

En el gráfico se han marcado dos rectas tangentes (cuya pendiente indicamos como **m**), una de ellas correspondiente al instante inicial y la otra a un tiempo cualquiera t_1. Esto permite comprobar que, en este ejemplo, la velocidad ha ido en aumento, ya que si tenemos en cuenta que las pendientes de estas rectas representan las velocidades respectivas, vemos que la pendiente de la segunda de las rectas es mayor que la de la recta trazada por el punto inicial, de modo que la velocidad en el instante t_1 es superior a la del instante inicial.

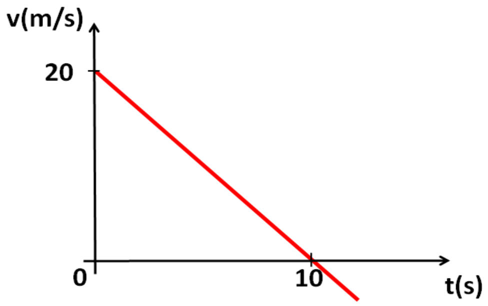
Resumiendo:

- **En un MRUV, la aceleración es constante, y por lo tanto la velocidad cambia "linealmente"**
- **Ecuaciones Horarias de un MRUV**

$$\boxed{v(t) = v_0 + a \cdot (t - t_0)} \qquad \boxed{x(t) = x_0 + v_0 \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} \cdot a \cdot (t - t_0)^2}$$

- **El gráfico de v(t) es una recta. Su pendiente representa la aceleración. Si a > 0, la recta v(t) es creciente; si a < 0 la recta v(t) es decreciente**
- **El área bajo la gráfica de la velocidad en un intervalo de tiempo cualquiera representa el desplazamiento realizado en dicho intervalo.**
- **El gráfico x(t) de un MRUV es una parábola. Si a > 0, sus ramas apuntan hacia arriba (cóncava hacia arriba), si a < 0, sus ramas apuntan hacia abajo (cóncava hacia abajo).**
- **La pendiente de la recta tangente al gráfico de la posición en función del tiempo, en un instante cualquiera, representa la velocidad en ese instante. En particular, si en algún instante t la velocidad del móvil es 0, entonces el gráfico x(t) tiene una recta tangente horizontal (punto crítico).**
- **Si v y a tienen igual signo, el móvil acelera; si tienen signos opuestos, el móvil frena.**

Ejemplo 1: *Un cuerpo se desplaza con movimiento rectilíneo. El siguiente gráfico muestra su velocidad en función del tiempo. Se sabe que en t = 0, x = 0*



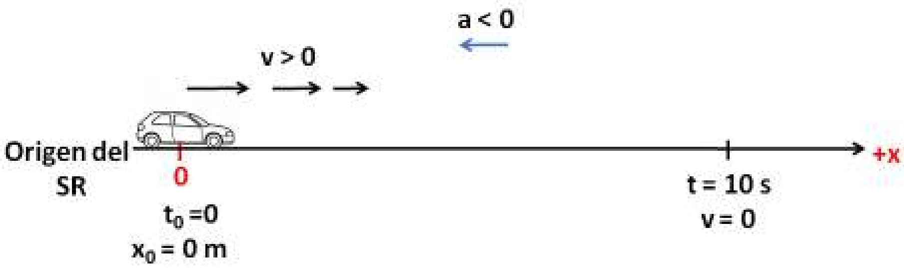
a) Calcular la aceleración.
b) Escribir v(t) y x(t), y calcular la velocidad a los 8 segundos.
c) ¿Cuánto se desplazó en los primeros 10 s?
d) Graficar x(t)

a) Estudiando el gráfico vemos que la velocidad es positiva pero decrece desde un valor de 20 m/s hasta anularse luego de 10 segundos, por lo que su aceleración debe ser negativa.

Para calcular la aceleración, podemos hallar la pendiente de la recta dada en el intervalo entre t = 0 y t = 10 s.

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0 - 20\text{m/s}}{10 - 0\text{s}} = -2\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

b) Hagamos un esquema de la situación.



En la figura, se ha definido un origen arbitrario (x = 0), y sentido positivo hacia la derecha (coincidente con el sentido del movimiento). Sabemos que la velocidad del móvil es positiva (ver gráfico v(t) dado), pero disminuye al transcurrir el tiempo. Esto se debe a que la aceleración apunta en sentido contrario a la velocidad (en este caso, a < 0).

Planteamos los modelos de ecuaciones horarias para este movimiento. Como la función v(t) es lineal, la aceleración es constante, el movimiento es un MRUV:

$$v(t) = v_0 + a \cdot (t - t_0)$$

$$x(t) = x_0 + v_0 \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} \cdot a \cdot (t - t_0)^2$$

Habíamos calculado $a = -2$ m/s^2, y podemos tomar como coordenadas “iniciales”: $t_0 = 0$, $x_0 = 0$, $v_0 = 20$ m/s (éste último valor fue obtenido del gráfico, a t = 0 la velocidad es 20 m/s). Con estas constantes de movimiento podemos armar las ecuaciones horarias:

$$v(t) = 20\frac{\text{m}}{\text{s}} - 2\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t$$

$$x(t) = 20\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t - 1\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t^2$$

Estas dos funciones nos permiten conocer el valor de la velocidad y la posición, respectivamente, para cualquier instante de tiempo entre 0 y 10 s. En particular, a los 8 s:

$$v(8s) = 20\frac{m}{s} - 2\frac{m}{s^2} \cdot 8s = 4\frac{m}{s}$$

$$x(8s) = 20\frac{m}{s} \cdot 8s - 1\frac{m}{s^2} \cdot (8s)^2 = 96\,m$$

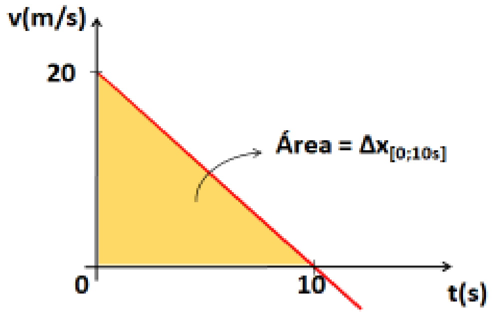
c) Sabemos que el móvil se detiene en t = 10 s pues en dicho instante v = 0 (ver gráfico). Por lo tanto, la posición en ese instante podremos calcularla usando la ecuación horaria de posición:

$$x(10s) = 20\frac{m}{s} \cdot 10s - 1\frac{m}{s^2} \cdot (10s)^2 = 100\,m$$

Como la posición inicial es x = 0, entonces lo que se desplazó en los primeros 10 segundos será:

$$\Delta x_{[0;10s]} = x(10s) - x(0s) = 100m - 0m = 100m$$

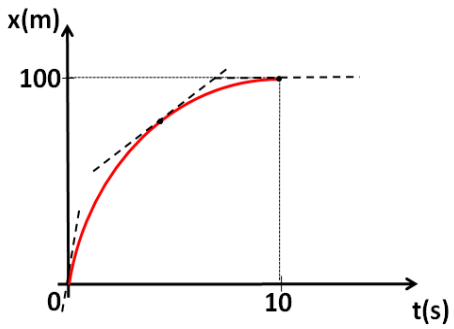
Calculemos el desplazamiento durante el frenado de otra forma: sabemos que, dado el gráfico v(t), si calculamos el área que encierra dicho gráfico y el eje t entre los instantes t = 0 y t = 10 s obtenemos lo que se desplazó el móvil en dicho intervalo de tiempo.



El área del triángulo pintado nos indicará entonces lo pedido:

$$\Delta x_{[0;10s]} = \text{Area} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{20\frac{m}{s} \times 10s}{2} = 100m$$

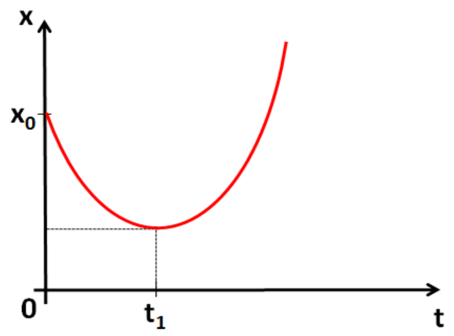
d) El gráfico de la posición en función del tiempo debe ser una parábola cóncava hacia abajo, ya que al ser la aceleración negativa el coeficiente del término cuadrático será negativo. Además, dicha parábola debe arrancar en 0, pues x(0s) = 0 m.



Se han trazado dos rectas tangentes para dos instantes cualquiera verificándose que la pendiente de la segunda es menor que la de la primera lo cual indica que la velocidad disminuye, lo que es consecuente con el hecho de que la aceleración tenga signo opuesto a la velocidad (el móvil frena).

También se ha marcado la posición alcanzada en t = 10 s, o sea cuando el móvil detuvo su marcha *(en este instante la parábola alcanza su máximo, pues la velocidad es cero - recta tangente horizontal).*

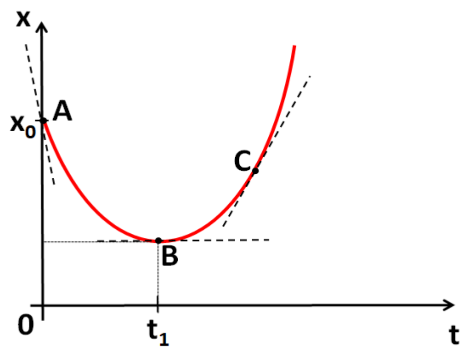
Ejemplo 2: *El siguiente gráfico muestra un arco de parábola que representa la posición en función del tiempo para un móvil que se desplaza en línea recta. Analizar sus características (¿está avanzando? ¿acelera? ¿frena? ¿siempre hace lo mismo?) y construir cualitativamente el gráfico correspondiente de velocidad en función del tiempo.*



Al observar el gráfico, pueden obtenerse la primeras conclusiones:

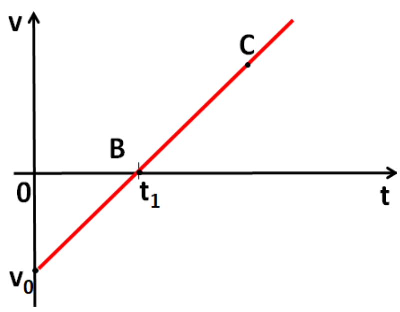
- Se trata de un MRUV, ya que en el enunciado han aclarado que el gráfico es una parábola, y se trata de x(t).
- Por la concavidad de la parábola (ramas hacia arriba), se deduce que la aceleración es positiva.

En la siguiente figura se han marcado tres puntos que van a servir para conocer el comportamiento de la velocidad:



En el primero de esos puntos (A) correspondiente al instante inicial, la recta tangente por allí trazada es decreciente, y por lo tanto su pendiente (la velocidad inicial del móvil) será negativa. Esto nos indica que en el instante inicial el móvil se hallaba retrocediendo, moviéndose hacia el origen de coordenadas.

Desde el instante inicial las sucesivas pendientes de las rectas tangentes son negativas, hasta que en el punto B la pendiente es nula (recta tangente horizontal), es decir la velocidad es cero. Esto nos permite trazar el gráfico v(t) entre los instantes $t = 0$ y $t = t_1$, que podemos unir con una recta ya que se trata de un MRUV.

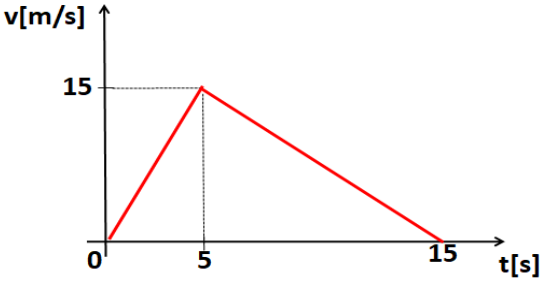


Notemos que, si bien en este período la gráfica v(t) aumenta, **el móvil se mueve cada vez mas despacio** (es decir, frena), pues la velocidad y la aceleración tienen **distinto signo**.

A partir del instante t_1 (es decir, desde B) el móvil invierte el sentido del movimiento, pues su velocidad pasa a ser positiva, como podemos ver en la pendiente de la recta tangente trazada en el punto C, tomando valores cada vez mayores. Es decir que el móvil, después de B, **se mueve cada vez más rápido** (es decir, acelera), pues la velocidad y aceleración tienen **igual signo**.

Es importante entender que, si bien hay intervalos donde el móvil acelera, y otros donde frena, la aceleración de este móvil **siempre es positiva**. Lo que ha cambiado de signo es la **velocidad**.

Ejemplo 3: *El siguiente gráfico corresponde a la velocidad de un móvil que se desplaza en línea recta, en función del tiempo. En el instante t = 0, x = 0*



a) *Calcular la aceleración que adquiere en el tramo [0;5s] y en [5s;15s] y describir el movimiento del móvil en cada tramo.*
b) *¿Cuál es el desplazamiento total realizado en los 15 segundos descriptos en el gráfico?*
c) *Confeccione el gráfico x(t) para el intervalo descripto.*

Del gráfico, podemos observar que el movimiento del cuerpo tiene 2 tramos con velocidad positiva (esto significa que el cuerpo siempre se desplaza en el mismo sentido, nunca *pega la vuelta*):

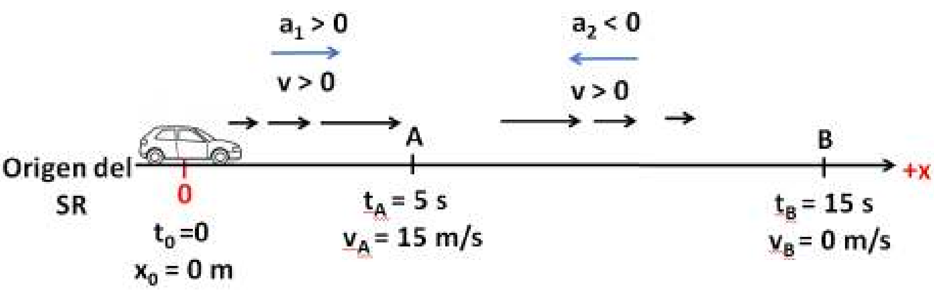
- En el intervalo [0;5s], la velocidad aumenta linealmente (desde el reposo) desde t = 0 hasta t = 5 s. Por lo tanto, en ese intervalo el móvil se desplaza realizando un MRUV. Observemos que la aceleración (llamemosla a_1) en dicho intervalo debe ser positiva, pues la recta v(t) es creciente, y resulta ser la pendiente de ese primer segmento. Por lo tanto, el movimiento del cuerpo en este tramo es *acelerado* (pues velocidad y aceleración tienen igual signo).
- Luego, en el intervalo [5s;15s], la velocidad disminuye linealmente hasta hacerse 0. En ese intervalo el móvil se desplaza realizando *otro* MRUV (con otra aceleración, pues la recta cambió). De hecho, la aceleración (llamemosla a_2), en este último tramo es negativa, pues la recta v(t) es decreciente. Entonces, en este segundo tramo, el movimiento es de frenado (signos de velocidad y aceleración son opuestos).

a) Calculemos entonces el valor de a_1 y a_2:

$$a_1 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{15\,m/s - 0}{5s - 0s} = 3\frac{m}{s^2}$$

$$a_2 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0 - 15\,m/s}{15s - 5s} = -1{,}5\frac{m}{s^2}$$

b) Llamemos A al punto por el que pasa el cuerpo en el instante t = 5s (o sea, t_A = 5s) y B al punto por el que pasa el cuerpo en t = 15 s (es decir, t_B = 15s). Sabemos que en t = 0, x = 0, por lo tanto, podemos definir t_0 = 0 y x_0 = 0. Hagamos un esquema volcando esa información.



Calculemos lo pedido de dos formas distintas:

<u>Plan A:</u> con ecuaciones horarias para cada tramo.

Para el tramo [0;5s], habíamos dicho que se trataba de un MRUV (en particular, MRUA), y por lo tanto podemos escribir las ecuaciones horarias que se corresponden con dicho movimiento:

$$v(t) = v_0 + a \cdot (t - t_0)$$

$$x(t) = x_0 + v_0 \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} \cdot a \cdot (t - t_0)^2$$

Sabemos, para este primer tramo, que t0 = 0, v0 = 0, x0 = 0 y a = a1 = 3 m/s^2. Entonces, al armar las ecuaciones horarias, quedará:

$$v(t) = 3\frac{m}{s^2} \cdot t$$

$$x(t) = 1{,}5\frac{m}{s^2} \cdot t^2$$

Calculemos la posición del móvil a la que se encontrará en t = 5 s (medido desde el origen):

$$x(5s) = 1{,}5\frac{m}{s^2} \cdot (5s)^2 = 1{,}5\frac{m}{s^2} \cdot 25s^2 = 37{,}5m$$

Si hiciéramos lo mismo para el intervalo [5s; 15s], los modelos de ecuaciones horarias serían los mismos que en el tramo anterior, pero con otras constantes de movimiento. En particular, para el segundo tramo: $x_0 = x_A = 37{,}5$ m, $t_0 = t_A = 5$ s, $v_0 = v_A = 15$ m/s y $a = a_2 = -1{,}5$ m/s^2. Por lo tanto, al armarlas quedaría:

$$v(t) = 15\frac{m}{s} - 1{,}5\frac{m}{s^2} \cdot (t - 5s)$$

$$x(t) = 37{,}5m + 15\frac{m}{s}(t - 5s) - 0{,}75\frac{m}{s^2} \cdot (t - 5s)^2$$

Calculemos entonces la posición del móvil a la que se encontrará en t = 15 s (medido desde el origen):

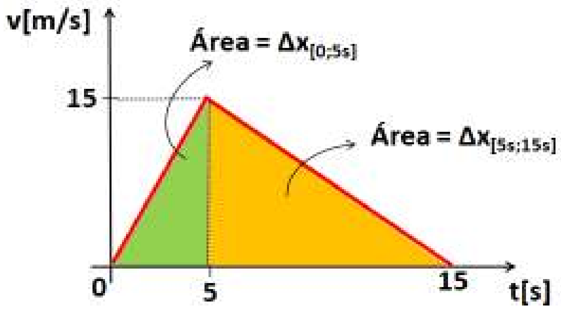
$$x(15s) = 37{,}5m + 15\frac{m}{s}(15s - 5s) - 0{,}75\frac{m}{s^2} \cdot (15s - 5s)^2 = 112{,}5m$$

Por lo tanto, el desplazamiento total entre t = 0 y t = 15 s es:

$$\Delta x_{[0;15s]} = x(15s) - x(0s) = 112{,}5m - 0m = 112{,}5m$$

<u>PLAN B:</u> Calcular el desplazamiento gráficamente.

Sabemos que, al tener el gráfico v(t), podemos calcular el desplazamiento simplemente mediante el cálculo del área que encierra dicho gráfico y el eje t entre los instantes que nos interesa (en este caso, entre t = 0 y t = 15 s). Dicha área puede calcularse considerando los triángulos definidios entre [0s;5s] y [5s;15s] (cada área representará el desplazamiento del móvil en <u>ese</u> intervalo. El desplazamiento total será la suma de ambas áreas (es decir, la suma de ambos desplazamientos).



Calculemos entonces esas áreas:

$$\Delta x_{[0;5s]} = \text{Area}= \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{15\frac{m}{s} \times 5s}{2} = 37{,}5m$$

$$\Delta x_{[5s;15s]} = \text{Area}= \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{15\frac{m}{s} \times (15s - 5s)}{2} = 75m$$

Por lo tanto, el desplazamiento total fue

$$\Delta x_{[0;15s]} = 37{,}5m + 75m = 112{,}5m$$

c) Para construir el gráfico x(t), debemos tener en cuenta que:

- En el intervalo [0;5s] el móvil parte del reposo y aumenta su rapidez con aceleración positiva. Por lo tanto, el gráfico x(t) ser una parábola cóncava hacia arriba, con vértice en t = 0. Además, en t = 5 s, x = 37,5 m.

- En el intervalo [5s;15s] el móvil disminuye su rapidez con aceleración negativa, pero sigue avanzando (pues su velocidad aún es positiva). Por lo tanto el gráfico x(t) es una parábola cóncava hacia abajo, pero que sigue creciendo, y tiene vértice en t = 15 s, pues ahí su velocidad es 0 (la recta tangente en dicho instante debe ser horizontal).

Si juntamos toda esa información, se obtiene el siguiente gráfico: