Vectores.

Un vector es un segmento orientado. 

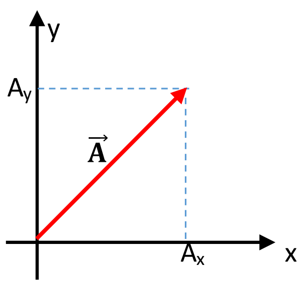
Tiene:

- módulo o intensidad: $|\vec{\mathbf{A}}|$ (es la longitud del vector, es un número positivo. (En Álgebra lo llamarán norma 2))
- dirección (la de la recta a la que pertenece)
- sentido (indicado por la punta de flecha)
- punto de aplicación (a veces, hay vectores libres que no tienen punto de aplicación)

Componentes escalares de un vector (en el plano)

I) En coordenadas cartesianas:

Las componentes escalares de un vector, en coordenadas cartesianas, son las proyecciones del vector sobre los ejes cartesianos.



En el extremo de $\vec{\mathbf{A}}$, trazamos una paralela al eje y, su intersección con el eje x es A_x.

En el extremo de $\vec{\mathbf{A}}$, trazamos una paralela al eje x, su intersección con el eje y es A_y.

A_x y A_y son las componentes escalares (son números y tienen signo) del vector $\vec{\mathbf{A}}$.

El signo de A_x y A_y indica para dónde apunta el vector.

Escribimos $\vec{\mathbf{A}}$ en función de sus coordenadas cartesianas: $\vec{\mathbf{A}} = (A_x ; A_y)$

II) En coordenadas polares:

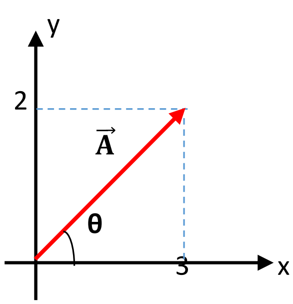
Las componentes polares de un vector son: el módulo del vector ($|\vec{\mathbf{A}}|$) y el ángulo (θ) que forma con el semieje positivo de las x, medido en sentido antihorario.

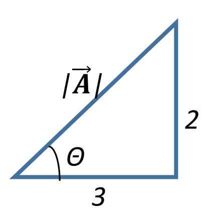
Un vector se puede expresar en función de sus coordenadas cartesianas o de sus coordenadas polares, y debemos poder pasar de unas a otras.

Analicemos tres ejemplos:

Ejemplo 1:

Dado el vector $\vec{A} = (3; 2)$, en coordenadas cartesianas, hallar sus coordenadas polares.





Dibujamos el triángulo rectángulo que quedó determinado, indicando la longitud de sus lados. La hipotenusa mide el $|\vec{A}|$.

Por Pitágoras, calculamos el $|\vec{A}|$:

$|\vec{A}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$

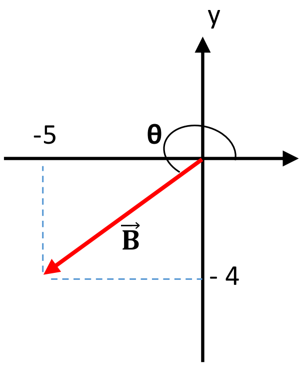
Para calcular el ángulo θ, usamos funciones trigonométricas:

tan θ = 2/3

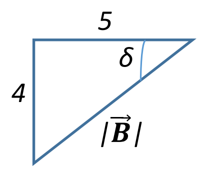
θ = 33,7°

Ejemplo 2:

Dado el vector $\vec{B}$ *= (- 5; - 4), en coordenadas cartesianas, hallar sus coordenadas polares.*



Dibujamos el triángulo *<u>rectángulo</u>* *que quedó determinado, indicando la longitud de sus lados. La hipotenusa mide el* $|\vec{B}|$*. Llamamos* δ *al ángulo que forma el vector* $\vec{B}$ *con la horizontal. Notar que θ = 180° +* δ*.*



Por Pitágoras, calculamos el $|\vec{B}|$*:*

$|\vec{B}| = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}$

Para calcular el ángulo δ*, usamos funciones trigonométricas:*

$\tan\delta = 4/5$

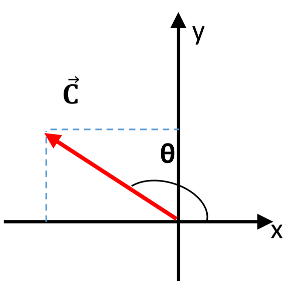
$\delta = 38{,}7°$

Con lo que:

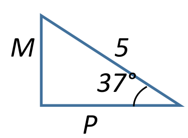
$\Theta = 180° + 38{,}7° = 218{,}7°$

Ejemplo 3:

Dado el vector $\vec{C}$ *en coordenadas polares,* $|\vec{C}| = 5$ *y θ = 143°, escribirlo en coordenadas cartesianas.*



Dibujamos el triángulo *<u>rectángulo</u>* *que quedó determinado. La hipotenusa mide el* $|\vec{C}| = 5$*. Llamamos M y P a las longitudes de los catetos.*
El ángulo que forma $\vec{C}$ *con la horizontal vale: 180° - θ = 37°*



Usando funciones trigonométricas, calculamos M y P.

$\sin 37° = M/5$

M = 3

$\cos 37° = P/5$

P = 4

Entonces, prestando atención al signo de las componentes escalares:

$\vec{C} = (-4; 3)$

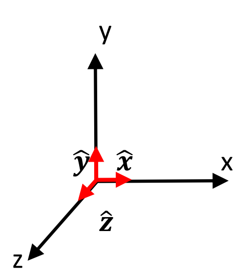
<u>Definición de versor:</u> es un vector de módulo 1. (Para notar un versor se usa el acento cirunflejo.)

Sirve para indicar una dirección y un sentido. Son importantes los versores $\hat{x}$, $\hat{y}$ y $\hat{z}$ asociados a los ejes cartesianos.

$\hat{x}$ = (1; 0; 0)

$\hat{y}$ = (0; 1; 0)

$\hat{z}$ = (0; 0; 1)



<u>Producto de un escalar “q” por un vector $\vec{A}$:</u> cuando se multiplica un escalar “q” (un número) por un vector $\vec{A}$, se obtiene otro vector.

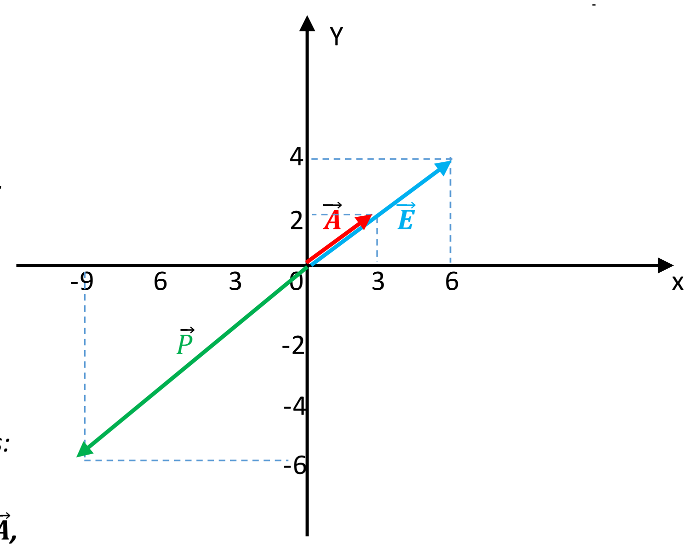
Sea $\vec{A} = (A_x ; A_y ; A_z)$

Al hacer el producto q $\vec{A}$ hay que multiplicar cada componente cartesiana de $\vec{A}$ por el escalar q.

$q\vec{A} = (q A_x ; q A_y ; q A_z)$

Ejemplo 4: (en el plano)

Sea el vector $\vec{A}$ = (3; 2)



a) *Calcular el vector $\vec{E} = 2\vec{A}$.*
   Al multiplicar cada componente escalar de $\vec{A}$ por 2 obtenemos:
   $\vec{E}$= (6; 4)
   Lo graficamos en celeste y vemos que tiene igual dirección y sentido que $\vec{A}$ y su módulo es el doble.

b) *Calcular el vector $\vec{P} = -3\vec{A}$*
   Al multiplicar cada componente escalar de $\vec{A}$ por -3 obtenemos:
   $\vec{P}$= (-9; -6)
   Lo graficamos en verde y vemos que tiene igual dirección que $\vec{A}$, pero sentido contrario y su módulo es el triple.

Analizando estos ejemplos es fácil darse cuenta que al multiplicar un escalar por un vector $\vec{A}$, se obtiene otro vector de:

- Igual dirección que $\vec{A}$.
- Igual sentido que $\vec{A}$ si el escalar es positivo, y sentido contrario que $\vec{A}$ si el escalar es negativo.
- Módulo igual al módulo del escalar por el módulo de $\vec{A}$.

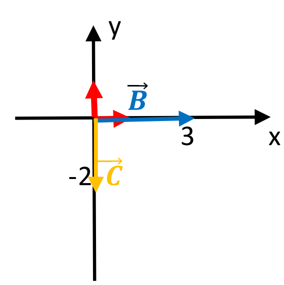
En física hay muchas magnitudes que se definen como el producto de un escalar por un vector, por ejemplo:

$\vec{F}_{\text{Neta}} = m\,\vec{a}$
Como la masa es un escalar positivo, la $\vec{F}_{\text{Neta}}$ tiene igual dirección y sentido que $\vec{a}$.

$\vec{v}_m = \Delta\vec{r}/\Delta t$ (multiplicamos el vector desplazamiento $\Delta\vec{r}$ por el escalar $1/\Delta t$)
Como Δt es positivo, el vector velocidad media $\vec{v}_m$ tiene igual dirección y sentido que $\Delta\vec{r}$.

$\vec{a}_m = \Delta\vec{v}/\Delta t$ (multiplicamos el vector variación de velocidad $\Delta\vec{v}$ por el escalar $1/\Delta t$)
Como Δt es positivo, el vector aceleración media $\vec{a}_m$ tiene igual dirección y sentido que $\Delta\vec{v}$.

Ahora que ya sabemos multiplicar un escalar por un vector, veamos otra forma de notar los vectores que tienen la dirección de uno de los ejes cartesianos, usando versores:



El vector $\vec{B}$, que en coordenadas cartesianas lo escribíamos así:
$\vec{B}$= (3; 0),
ahora podemos pensarlo como el producto del escalar 3 por el versor $\hat{x}$.
$\vec{B} = 3\,\hat{x}$

El vector $\vec{C}$, que en coordenadas cartesianas lo escribíamos así:

$\vec{C}$= (0; -2),

ahora podemos pensarlo como el producto del escalar -2 por el versor $\hat{y}$.

$\vec{C}$= -2 $\hat{y}$

En adelante, para escribir los vectores vamos a utilizar los versores.

Los vectores paralelos al eje x los escribiremos como el producto entre la componente escalar x del vector multiplicada por el versor $\hat{x}$.

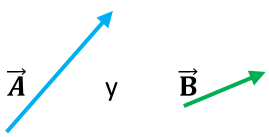
Los vectores paralelos al eje y los escribiremos como el producto entre la componente escalar y del vector multiplicada por el versor $\hat{y}$.

Suma de vectores.

Hay varios métodos para sumar vectores:

Suma de vectores
- método gráfico
  - del paralelogramo.
  - de la poligonal.
- método analítico
  - de las componentes.

Sean los vectores: $\vec{A}$ y $\vec{B}$



Queremos hallar el vector $\vec{S}$ tal que $\vec{S}$ = $\vec{A}$ + $\vec{B}$

Suma gráfica de vectores:

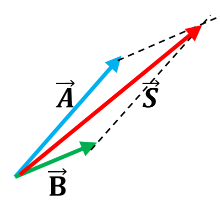
● Sumamos por el método del paralelogramo:

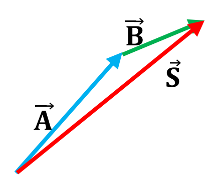
1° Dibujamos los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ con el origen común.

2° En el extremo de $\vec{A}$ trazamos una paralela a $\vec{B}$.

3° En el extremo de $\vec{B}$ trazamos una paralela a $\vec{A}$.

4° El vector suma $\vec{S}$ es la diagonal del paralelogramo.





● Sumamos por el método de la poligonal:

1° Ponemos un vector a continuación del otro.

2° El vector suma $\vec{S}$, tiene origen en el origen del primero y extremo en el extremo del último.

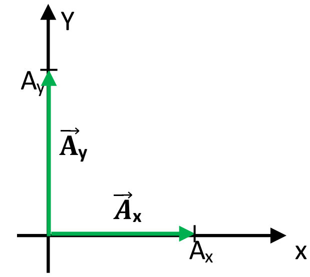
Mirando el último esquema vemos que en general: $|\vec{S}| \leq |\vec{A}|+|\vec{B}|$

(Únicamente si sumamos dos vectores paralelos y de igual sentido se cumple que el módulo del vector suma es la suma de los módulos.)

En física vamos a sumar fuerzas, velocidades, aceleraciones, etc.

Observemos que con lo visto podemos generalizar la notación de vectores en el plano, usando versores.

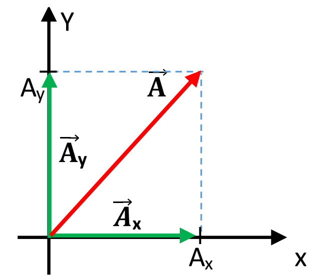
Sean los vectores $\vec{\mathbf{A}}_{\mathbf{x}}$ y $\vec{\mathbf{A}}_{\mathbf{y}}$ que se muestran en la figura.
Estos vectores, que son paralelos a los ejes x e y respectivamente,
los podemos escribir usando versores de la manera que vimos anteriormente:



$\vec{\mathbf{A}}_{\mathbf{x}} = A_x\,\hat{\boldsymbol{x}}$

$\vec{\mathbf{A}}_{\mathbf{y}} = A_y\,\hat{\boldsymbol{y}}$

Si sumamos los vectores $\vec{\mathbf{A}}_{\mathbf{x}}$ y $\vec{\mathbf{A}}_{\mathbf{y}}$ por el método del paralelogramo y llamamos $\vec{\mathbf{A}}$ al vector suma, tenemos:



$\vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{A}}_{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{A}}_{\mathbf{y}}$

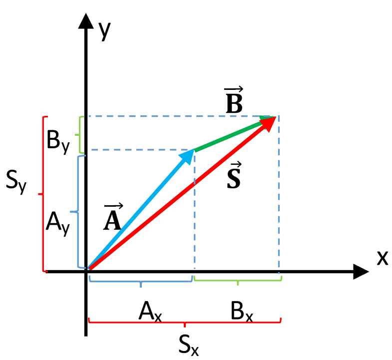
$\vec{\mathbf{A}} = A_x\,\hat{\boldsymbol{x}} + A_y\,\hat{\boldsymbol{y}}$

Aprendimos entonces otra manera de escribir un vector usando versores que es equivalente a la que usábamos anteriormente $\vec{\mathbf{A}} = (A_x\,;\,A_y)$

Llamamos A_x y A_y (son números con su signo) a las componentes escalares del vector
Llamamos $\vec{\mathbf{A}}_{\mathbf{x}}$ y $\vec{\mathbf{A}}_{\mathbf{y}}$ (son vectores) a los vectores componentes del vector $\vec{\mathbf{A}}$.

Suma analítica de vectores:

Para deducir como se suman analíticamente dos vectores, vamos a dibujar la suma gráfica por el método de la poligonal sobre los ejes cartesianos.



$\vec{\mathbf{A}} = A_x\,\hat{\boldsymbol{x}} + A_y\,\hat{\boldsymbol{y}}$

$\vec{\mathbf{B}} = B_x\,\hat{\boldsymbol{x}} + B_y\,\hat{\boldsymbol{y}}$

Mirando el gráfico, el vector suma se escribe:

$$\vec{\mathbf{S}} = \underbrace{(A_x + B_x)}_{S_x}\,\hat{\boldsymbol{x}} + \underbrace{(A_y + B_y)}_{S_y}\,\hat{\boldsymbol{y}}$$

Vemos entonces que cuando sumamos vectores, se suman las componentes escalares x por un lado y las componentes escalares y por el otro. No se mezclan las componentes.

Hagamos un ejemplo numérico:

Dados los vectores,

$\vec{A} = 6\,\hat{\boldsymbol{x}} + 8\,\hat{\boldsymbol{y}}$

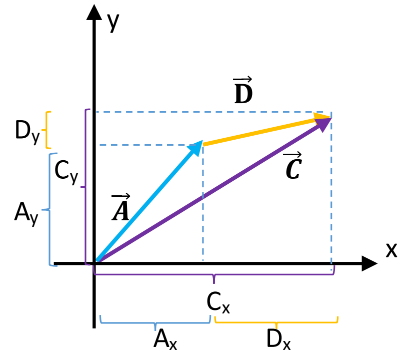
$\vec{B} = -4\,\hat{\boldsymbol{x}} + 3\,\hat{\boldsymbol{y}}$

Hallar el vector suma $\vec{S}$.

$\vec{S} = (6 - 4)\,\hat{\boldsymbol{x}} + (8 + 3)\,\hat{\boldsymbol{y}}$

$\vec{S} = 2\,\hat{\boldsymbol{x}} + 11\,\hat{\boldsymbol{y}}$

Resta de vectores:



Si miramos el gráfico, por el método de la poligonal, se puede decir que:

$\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{D}} = \vec{\mathbf{C}}$

Despejando el vector $\vec{\mathbf{D}}$:

$\vec{\mathbf{D}} = \vec{\mathbf{C}} - \vec{\mathbf{A}}$

Mirando el gráfico, las componentes escalares de $\vec{\mathbf{D}}$ las podemos escribir:

$$\vec{\mathbf{D}} = \underbrace{(C_x - A_x)}_{D_x}\,\hat{x} + \underbrace{(C_y - A_y)}_{D_y}\,\hat{y}$$

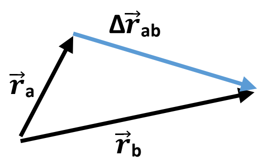
Vemos entonces que para restar vectores, se restan las componentes x por un lado y las componentes y por el otro. No se mezclan las componentes.

Observar que el vector diferencia $\vec{\mathbf{D}}$ tiene origen en el extremo del sustraendo ($\vec{\mathbf{A}}$) y extremo en el extremo del minuendo ($\vec{\mathbf{C}}$).

En física vamos a restar vectores para calcular diferencias. Por ejemplo:

El vector desplazamiento lo definimos:

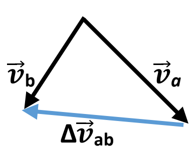
$\Delta\vec{r}_{ab} = \vec{r}_b - \vec{r}_a$



Observar que $\Delta\vec{r}_{ab}$ tiene origen en el extremo de $\vec{r}_a$ y extremo en el extremo de $\vec{r}_b$.

Al vector variación de velocidad lo definimos:

$\Delta\vec{v}_{ab} = \vec{v}_b - \vec{v}_a$



Observar que $\Delta\vec{v}_{ab}$ tiene origen en el extremo de $\vec{v}_a$ y extremo en el extremo de $\vec{v}_b$.

Cuando calculamos la diferencia o variación entre dos vectores "inicial" y "final", el vector diferencia tiene origen en el extremo del vector "inicial" y extremo en el extremo del vector "final".

Ejemplo:

Sean los vectores posición, en un dado sistema de referencia, en el plano:

$\vec{\mathbf{r}}_a = 10\ m\,\hat{x} + 7\ m\,\hat{y}$

$\vec{\mathbf{r}}_b = 4\ m\,\hat{x} - 5\ m\,\hat{y}$

El vector desplazamiento es:

$\Delta\vec{\mathbf{r}}_{ab} = (4\ m - 10\ m)\,\hat{x} + (-5\ m - 7\ m)\,\hat{y}$

$\Delta\vec{\mathbf{r}}_{ab} = -6\,\hat{x} - 12\ m\,\hat{y}$